EUCLIDES

ELEMENTOS

LIBROS V-XIII

EDITORIAL GREDOS

BIBLIOTECA CLÁSICA GREDOS, 191

EUCLIDES

ELEMENTOS

LIBROS V - IX

TRADUCCIÓN Y NOTAS DE
MARÍA LUISA PUERTAS CASTAÑOS



EDITORIAL GREDOS

ELEMENTOS

Asesor para la sección griega: CARLOS GARCÍA GUAL.

Según las normas de la B. C. G., la traducción de este volumen ha sido revisada por PALOMA ORTIZ.



Sánchez Pacheco, 81, Madrid, 1994.

Depósito Legal: M. 28297-1991.

ISBN 84-249-1463-5. Obra completa.
ISBN 84-249-1640-9. Tomo II.

Impreso en España. Printed in Spain.
Gráficas Cóndor, S. A., Sánchez Pacheco, 81, Madrid, 1994. — 6640.

NOTA SOBRE LA PRESENTE TRADUCCIÓN

La presente traducción sigue la edición de J. L. Heiberg y H. Mengue, *Euclidis Opera omnia*, vols. I-IV, Leipzig, 1883-1886. Como en el volumen anterior, pongo entre paréntesis aquellas palabras o frases que no aparecen en el texto griego y que considero necesarias para la comprensión del mismo.

Por otra parte, dada la importancia de la formulación original de la relación de proporción *hos... hoútos:* «como... es a..., así... es a...», mantendré esta traducción, a pesar de que en castellano su forma más frecuente es: «...es a... como... es a...».

Conste, en fin, mi agradecimiento a Luis Vega por su colaboración en las notas.

LIBRO QUINTO

DEFINICIONES

1. Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor[1].
2. Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.
3. Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas[2].

---

[1] *Méros* «parte» se utiliza en los *Elementos* en dos sentidos: a) el más general de la noción común 5: «El todo es mayor que la parte»; b) como aquí, con el significado más restringido de lo que hoy llamaríamos «submúltiplo» o «parte alícuota». En este mismo sentido se utiliza en VII, Def. 3, cuya única diferencia con esta definición es el uso de «número» en lugar de «magnitud».

Aristóteles, *Metafísica* 1023b12, hace la siguiente precisión: «Se llama parte en un sentido aquello en que puede ser dividida una cantidad (pues siempre lo que se quita de una cantidad en cuanto cantidad se llama parte de ella: por ejemplo se dice que dos es en cierto sentido parte de tres) y en otro sentido (se llama parte) sólo a aquellas de entre ellas que miden al todo».

La noción de medida y la relación de medir a (y ser medido por) quedan indefinidas.

[2] *Schêsis katà pēlikótēta* «relación con respecto a su tamaño». El sentido más común de *pēlíkos* es «cuán grande» referido con frecuencia a la

4. Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra[3].

---

edad. Nicómaco distingue entre *pēlíkos* referido a magnitud y *posós* referido a cantidad. Jámblico, a su vez, establece la diferencia entre *pēlícon*, que es continuo, como objeto de la geometría, y *posón*, que es discreto, como objeto de la aritmética. Tolemeo habla del «tamaño» de las cuerdas de un círculo. Simson traduce por «magnitud»; De Morgan prefiere una interpretación como «cuantuplicidad». «Tamaño» me parece la más acorde con el uso griego.

Por otro lado, Hankel y Simson, siguiendo a Barrow (*Lectiones Cantabrigienses*, Londres, 1684, Lect. III de 1666), piensan que esta definición es demasiado general y vaga, tiene un aire de noción más filosófica que matemática y apenas desempeña ningún papel en la teoría euclídea de la proporción. Hankel la considera además sospechosa por el uso de *katà pēlikóteta*, ya que esta expresión sólo aparece otra vez en VI, Def. 5 (*pēlikótētes*). Simson sugiere la posibilidad de que sea una interpolación debida a un editor «menos inteligente que Euclides» (Simson, *Los seis primeros libros y el undécimo y duodécimo de los Elementos de Euclides*, págs. 308-309. Por lo demás, aparece en todos los manuscritos y no hay suficientes razones para no considerarla genuina.

Lógos, por otra parte, se aplicaba en principio a «razón» únicamente entre conmensurables frente a *álogos* «inconmensurable». En el libro V de los *Elementos* adquiere un sentido más amplio que abarca la razón de magnitudes tanto conmensurables como inconmensurables, pues ambas tienen la posibilidad de exceder una a otra cuando se multiplican.

Entre las definiciones 3 y 4, dos mss. y Campano insertan las siguientes palabras: *analogía dè hē tòn lógōn tautótēs*, «proporción es la igualdad de razones». Se trata de una interpolación posterior a Teón sacada de las obras de aritmética. Aristóteles habla de proporción como «igualdad de razones» en *Ética Nicomáquea* V 6, 1131a31, pero está claro que se refiere a números.

[3] Los intérpretes de la teoría euclídea de la proporción han tomado esta definición en diversos sentidos. Hay quienes la han visto como una generalización de la relación de razón entre magnitudes homogéneas (V, Def. 3), capaz de cubrir tanto magnitudes conmensurables como magnitudes inconmensurables; pero ésta es una distinción no pertinente en el presente contexto. Más justo sería entender que la def. 4 excluye la mediación

5. Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón[4] con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera

---

de dicha relación entre una magnitud finita y otra infinita del mismo género. Hay quienes amplían esta exclusión a las magnitudes infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Es cierto que el ámbito al que se refiere la teoría carece de una magnitud máxima, por esta def. 4, y de una magnitud mínima, por la proposición X 1. También cabe pensar que la matemática griega «clásica» viene a soslayar así ciertos usos del infinito en un sentido semejante al declarado por Aristóteles: los matemáticos no necesitan servirse de la idea de infinito (actual); les basta considerar objetos de la magnitud que quieran (*Física* 207b30 ss.), habida cuenta de la posibilidad de ir más allá de una magnitud finita dada, bien mediante adiciones sucesivas (en la línea de la def. 4) o bien mediante sustracciones sucesivas (en la línea de la prop. X 1).

En este punto parece obligado recordar un lema implícito en ciertas pruebas atribuidas a Eudoxo, que Arquímedes formulará como una asunción [*lambanómenon*] expresa: dadas dos magnitudes geométricas desiguales (líneas, superficies, sólidos), la mayor excede a la menor en una magnitud tal que, añadida sucesivamente a sí misma, puede exceder a su vez a cualquier magnitud del mismo género que las relacionadas (*Sobre la esfera y el cilindro* I, lamb. 5; en *Sobre espirales*, la suposición se restringe a líneas y áreas; en *Sobre la cuadratura de la parábola*, a áreas). Así pues, cabe considerar que esta asunción de Arquímedes no se identifica con la def. 4, sino que en cierto modo la complementa. Euclides define una relación de razón entre magnitudes homogéneas en general por referencia a la multiplicación; Arquímedes postula, en cambio, una condición precisa para ciertas clases de magnitudes homogéneas (líneas, superficies, sólidos) y se remite a la adición de diferencias (una referencia similar hará Euclides luego, en la prop. X 1). Pero así mismo cabe sospechar que el proceder de Euclides es una reelaboración más alejada de las primicias eudoxianas que la vía de explicitación directa y específica seguida por Arquímedes.

[4] Por regla general, adoptaré la expresión «guardar la misma razón» como traducción común de las diversas formulaciones de esta relación de proporción que aparecen en el texto: e.g. «estar en la misma razón [*en tôi autôi lógôi eînai*]», en esta def. 5; o «tener la misma razón [*tòn autòn*

y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente[5].

6. Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón[6].

---

lógon échein]», en la def. 6. Por lo demás, la fórmula más corriente en las proposiciones será: «como ... (es) a ..., así ... (es) a ... [*hōs* ... *pròs* ..., *hoútōs* ... *pròs* ...» —una variante: *hoîos* ... *potì* ..., *kaì* ... *potì* ..., que podría ser anterior, aparece en ARQUITAS B 2.

[5] Suele considerarse que esta def. V, 5, constituye la piedra angular de la teoría de la proporción. Desde luego, suministra un criterio necesario y suficiente de proporcionalidad. Por otro lado, además de su importancia sistemática, ha adquirido relieve en una perspectiva histórica. No sólo podría ser una clave para determinar las relaciones entre el legado de Eudoxo y la reelaboración de Euclides; también reviste importancia a la hora de apreciar la suerte conocida por las versiones posteriores de la teoría euclídea misma. Por último, no estará de más advertir cierta diferencia entre la forma lógica de esta definición y la forma lógica de su aplicación habitual en las proposiciones demostradas por su mediación. La forma lógica de la def. 5 viene a ser la de una disyunción de conjunciones: siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría, y m, n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción $a : b :: c : d$ si y sólo si: o $((m.a > n.b)$ y $(m.c > n.d))$ o $((m.a = n.b)$ y $(m.c = n.d))$ o $((m.a < n.b)$ y $(m.c < n.d))$. Sin embargo, la forma lógica de su aplicación en la proposición V 11, por ejemplo, corresponde más bien a una conjunción de condiciones: (si $m.a > n.b$, entonces $m.c > n.d$) y (si $m.a = n.b$, entonces $m.c = m.d$) y (si $m.a < n.b$, entonces $m.c < n.d$). Estas dos formas, de suyo, no son lógicamente equivalentes ni, por cierto, la primera implica la segunda. Pero en el contexto de la teoría, devienen efectivamente equivalentes gracias a la suposición implícita de que las magnitudes consideradas constituyen un sistema de objetos totalmente ordenado.

[6] Más literalmente: «llámense en proporción» (*análogon kaleísthō*). El uso de *kaleísthō* parece indicar que se trata de una estipulación del propio Euclides. *Análogon* es una expresión adverbial con un uso marcadamente especializado en matemáticas. Su sentido se corresponde con el de la expresión formularia *anà lógon*, empleada antes de Euclides: aparece, por ejemplo, en el fragmento B 2 de Arquitas sobre las proporciones musica-

7. Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta[7].
8. Una proporción entre tres términos es la menor posible[8].

---

les, en Platón (e.g. *Fedón*, 110d), o en Aristóteles (e.g. *Meteor.* 367a30 ss.). A. SZABÓ: *Anfänge der griechischen Mathematik*, Budapest, 1969, II §§ 13-16, propone algunas conjeturas filológicas e históricas de interés sobre el significado matemático de ambas expresiones. Euclides, por su parte, se sirve de *análogon* con cierta libertad, por ejemplo: para referirse a las magnitudes proporcionales en su conjunto —como en esta def. 6 o en la def. 9—, o para referirse a un término proporcional (a «una proporcional») —como en las props. VI 12, 16—. Por lo demás, esta especialización relativamente técnica de *análogon* no es compartida por otros términos relacionados como el sustantivo *analogía* o el adjetivo *análogos*, que enmarcan su posible significación matemática en una gama de usos más amplios, dentro de un sentido general de paralelismo, correspondencia o semejanza.

[7] Esta definición depara un criterio de no proporcionalidad y completa, tras las defs. 4 y 5, el núcleo básico de la teoría euclídea. Sin embargo, también convendría declarar un supuesto adicional: la existencia de un cuarto término proporcional —obra tácitamente por ejemplo en la prueba de la prop. V 18, y sólo más adelante, en VI 12, Euclides se detiene a demostrar un caso particular: dadas tres rectas, hallar una cuarta proporcional—. Si a esta suposición se añade una condición de tricotomía congruente con el sistema ordenado de magnitudes al que se refiere la teoría, Euclides puede disponer de un recurso suplementario para probar una proposición (i.e. que *a* es a *b* como *c* es a *d)*, a saber: la reducción al absurdo de las alternativas de no proporción (i.e. que la razón de *a* a *b* sea mayor, o sea menor, que la razón de *c* a *d)*. Por otra parte, al margen de la deuda que la def. 5 tuviera contraída con algún criterio de proporcionalidad avanzado por Eudoxo, esta definición 7 parece, según todos los visos, original de Euclides.

[8] Hankel cree que la presente definición ha sido interpolada, pues es superflua y utiliza, contra la costumbre de Euclides, la palabra *hóros* para



9. Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que (guarda) con la segunda.
10. Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción[9].
11. Se llaman magnitudes correspondientes las antecedentes en relación con las antecedentes y las consecuentes con las consecuentes[10].

---

el término de una proporción. Pero ya Aristóteles utiliza *hóros* en este sentido (*Ética Nicomáquea*, 1131a31 ss.): «La proporción es una igualdad de razones y requiere, por lo menos, cuatro términos. Claramente, la proporción discreta requiere cuatro términos; pero también la continua, porque se sirve de uno de ellos como dos y lo menciona dos veces».

La distinción entre discreta y continua parece remontarse a los pitagóricos (cf. NICÓMACO, II 21, 5; 23, 2, 3) donde se utiliza *synēmméne* en lugar de *synechés*. Euclides no emplea los términos *dierēmménē* y *synechés* en esta correlación.

Por otra parte, las primeras palabras de la Def. 9, «cuando tres magnitudes son proporcionales», que parecen referirse a la def. 8, apoyan la idea de que esta última es genuina.

[9] Está claro que «razón duplicada, triplicada... etc.» son meros casos particulares de la razón compuesta, siendo, de hecho, razones compuestas de dos, tres, etc. razones iguales.

Los geómetras griegos llamaban razón duplicada y triplicada a las que son iguales, respectivamente, al cuadrado y al cubo de una razón. Euclides utiliza los términos *diplasíōn* y *triplasíōn* y no *diplásios* y *triplásios* porque estos últimos se usaban frecuentemente en el sentido de razones de 2 a 1, 3 a 1, etc. En este caso, su esfuerzo por introducir rigor en la terminología tuvo un éxito sólo parcial, pues encontramos varios ejemplos de uso indiscriminado de estos términos en Arquímedes, Nicómaco y Papo.

Las cuatro magnitudes de la Def. V, 10, deben estar, por supuesto, en proporción continua aunque el texto griego no lo haga constar.

[10] Utilizo «correspondientes» para verter *homóloga*, en vez del cultismo «homólogas» empleado en otras versiones al español. Euclides parece

12. Una razón *por alternancia* consiste en tomar el antecedente en relación con el antecedente y el consecuente en relación con el consecuente[11].
13. Una razón *por inversión* consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente[12].
14. La composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto con el consecuente como una sola (magnitud) en relación con el propio consecuente[13].

---

estipular aquí cierto sentido técnico para un término de uso común, y a esta actitud quiere aproximarse la versión presente. El sentido inicialmente previsto por Euclides se generalizó más tarde y, a partir de Arquímedes, *homólogos* llegó a significar unos elementos geométricos (segmentos, lados, diámetros) que ocupan parejo lugar en dos figuras que se comparan. Quizás en los *Elementos* VI 19, 20, ya se den algunos pasos hacia esta generalización.

[11] A partir de aquí nos encontramos con una serie de términos que se refieren a diversas transformaciones de razones o proporciones. En las definiciones 12-17, Euclides los aplica a razones cuando describirían mejor proporciones, tal vez porque, al referirlas a proporciones, parecería que asume algo que todavía no se ha probado (cf. V 16, 7 por., 18, 17, 19 por.).

Enalláx «por alternancia», término general que no se usa exclusivamente en matemáticas, lo encontramos ya en Aristóteles (*Analíticos Segundos* I 5, 74a18: *kaì tò análogon hoti enalláx*) «y que una proporción es por alternancia». En términos matemáticos se podría expresar de la siguiente forma: $a : b :: c : d \rightarrow a : c :: b : d$.

[12] *Anápalin* «por inversión», término general que no se usa sólo en matemáticas, lo encontramos ya en Aristóteles aplicado a las proporciones (*Del cielo* I 6, 273b32). En términos matemáticos: $a : b :: c : d \rightarrow b : a :: c : d$.

[13] *Sýnthesis lógou* «composición de una razón» no es lo mismo que *synkeímenos lógos* «razón compuesta». Sin embargo, la distinción entre ambas no está clara en Euclides, que, por ejemplo, en V 17, utiliza *synkeímenos* refiriéndose a la composición de una razón. Los geómetras posteriores a Euclides utilizan *synthénti* o *katà sýnthesin* (Arquímedes) para referirse a la composición de una razón en un intento de deshacer la ambigüedad de los términos que todavía aparece en Euclides. Por otra parte los

15. La separación de una razón consiste en tomar el exceso por el que el antecedente excede al consecuente en relación con el propio consecuente[14].
16. La conversión de una razón consiste en tomar el antecedente en relación con el exceso por el que el antecedente excede al consecuente[15].
17. Una razón *por igualdad*[16] se da cuando, habiendo varias magnitudes y otras iguales a ellas en número

---

verbos *syntíthēmi* y *synkeimai* se utilizan también como «sumar» en otros contextos.

Sýnthesis lógou en expresión matemática:

$$a : b :: c : d \rightarrow (a + b) : b :: (c + d) : d$$

[14] *Diaíresis lógou* se refiere a la transformación:

$$a : b :: c : d \rightarrow (a - b) : b :: (c - d) : d$$

Así como la «composición de una razón» se obtenía sumando el antecedente con el consecuente, la «separación de una razón» se obtiene restando el consecuente del antecedente. Sin embargo, la palabra griega *diaíresis* hace referencia a la «división» de una razón, lo mismo que *dielónti* por oposición a *synthénti*. Por otra parte, los términos griegos *synthénti* y *dielónti* dan lugar al uso de los latinos *componendo* y *separando* desde la Edad Media hasta nuestros días. Por todo ello, «separación de una razón» me parece la versión más adecuada.

[15] *Anastrophḗ* «por conversión»:

$$a : b :: c : d \rightarrow a : (a - b) :: c : (c - d)$$

La traducción al latín *convertendo* del participio *anastrépsanti*, paralelo a *synthénti* y *dielónti*, ha sido utilizada también desde la Edad Media.

[16] *Di'ísou lógos* parece referirse a «igual distancia o intervalo», es decir, después de un número igual de términos intermedios. Una vez más la definición se aplicaría mejor a proporciones que a razones, pero no se prueba hasta V 22. Por tanto, la definición sirve sólo para dar nombre a cierta inferencia que es de constante aplicación en matemáticas:

$$a : b :: A : B;\ b : c :: B : C \ldots j : k :: J : K \rightarrow a : k :: A : K$$

La expresión *di'ísou* no aparece con frecuencia en contextos no geométricos (cf. empero PLATÓN, *República* 617b); e incluso en estos contextos suele emplearse a través de la invocación o aplicación de proposicio-

que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— la primera es a la última; o, dicho de otro modo, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios[17].

18. Una proporción perturbada[18] se da cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como el antecedente es al consecuente —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— el antecedente es al consecuente, y como el consecuente es a alguna otra (magnitud) —entre las primeras magnitudes—, así

nes euclídeas como V 22-23. Por otro lado, no deja de llamar la atención la composición un tanto explicativa de esta definición: «o, dicho de otro modo, ...» En ella —justamente en la primera parte de esta definición nominal de proporción por igualdad, la que precede a la versión alternativa en términos congruentes con las defs. anteriores— se ha visto uno de los posibles casos de contaminación del texto euclídeo mediante la interpolación de ciertos teoremas en las definiciones mismas; *vid.* G. Aujac, «Les définitions du livre V d'Euclide dans la collection Héronienne et dans les *Institutions* de Cassiodore», *Llull* 11/20 (1988), 5-18.

[17] Algunas fuentes (e.g. los mss. F, V, p; aunque no el ms. no teonino P) insertan a continuación una definición de proporción ordenada [*tetagménē analogía*]. Viene a ser la que existe cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como el antecedente es al consecuente —entre las primeras—, así el antecedente es al consecuente —entre las segundas—, y como —entre las primeras— el consecuente es a alguna otra magnitud, así —entre las segundas— el consecuente es a alguna otra. La formulación original es un tanto elíptica y suele aparecer como una glosa al margen en los restantes mss. teoninos.

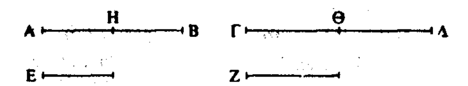
[18] *Tetaragménē* «perturbada» se usa cuando a tres magnitudes A, B, C se asignan otras tres a, b, c de modo que $A : B :: b : c$ y $B : C :: a : b$. Describe un caso particular de la proporción «por igualdad».

—entre las segundas magnitudes— alguna otra (magnitud) es al antecedente [19].

PROPOSICIÓN 1

Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas.

Sean un número cualquiera de magnitudes AB, ΓΔ respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes E, Z iguales en número.



Digo que, cuantas veces AB sea múltiplo de E, tantas veces lo serán también AB, ΓΔ de E, Z.

[19] Los libros V y VI de los *Elementos* exponen la teoría griega «clásica» de la proporción. El libro V sienta unas bases conceptuales y deductivas, cuyo núcleo explícito podría contraerse a las definiciones 4, 5 y 7. El libro VI muestra diversas aplicaciones entre las que no faltan réplicas de resultados obtenidos anteriormente en el libro I (I 47) o en el II (II 5, 11, 14) por medios más sencillos, intuitivos y obedientes a los antiguos dictados de la Musa pitagórica —e.g. la aplicación de áreas—. Ahora Euclides desarrolla un legado no sólo más abstracto y refinado sino más reciente: el núcleo de la teoría, en especial el criterio de comparación de equimúltiplos del que se hace eco la definición 5, suele atribuirse a Eudoxo de Cnido (*fl. c.* 368-365), miembro prominente de la Academia platónica. Hoy tenemos motivos para suponer que los matemáticos griegos del s. v ya habían conocido una noción numérica de razón; pero sus limitaciones se habían hecho manifiestas a raíz del tropiezo con las magnitudes

Pues dado que AB es equimúltiplo de E y ΓΔ de Z, entonces, cuantas magnitudes iguales a E hay en AB, tantas hay también en ΓΔ iguales a Z. Divídase AB en las magnitudes AH, HB iguales a E y ΓΔ en las (magnitudes) ΓΘ, ΘΔ iguales a Z; entonces el número de las (magnitudes) AH, HB será igual al número de las (magnitudes) ΓΘ, ΘΔ. Ahora bien, como AH es igual a E y ΓΘ a Z, entonces AH es igual a E y AH, ΓΘ a E, Z. Por lo mismo, HB es igual a E y HB, ΘΔ a E, Z; por tanto, cuantas (magnitudes) hay en AB iguales a E, tantas hay también en AB, ΓΔ iguales a E, Z; luego cuantas veces sea AB múltiplo de E, tantas veces lo serán también AB, ΓΔ de E, Z.

Por consiguiente, si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán también todas de todas. Q. E. D.

---

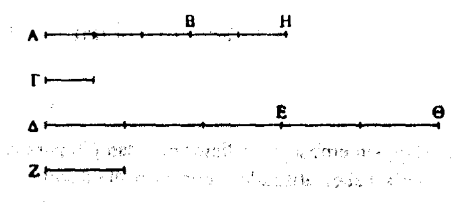
inconmensurables. Hay, sin embargo, indicios que dan pie para conjeturar que el s. IV bien podría haber atisbado algún otro planteamiento afín al antiguo proceder «pitagórico», pero más comprensivo: en particular, la posibilidad de dar cuenta de razones y proporciones a partir de la noción de *anthyphaíresis* —o *antanáiresis*, cf. ARISTÓTELES, *Tópicos* 158b29-35—. (*Vid.*, por ejemplo, los estudios de W. R. KNORR, *The Evolution of Euclidean Elements*, Dordrecht-Boston, 1975; D. H. FOWLER, «Anthyphairetic ratio and Eudoxian proportion», *Archive for the History of Exact Sciences* 24 (1981), 69-72, y *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*, Oxford, 1987; J. L. GARDIES, *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*, París, 1988). Lo cierto, en cualquier caso, es que la reelaboración euclídea del nuevo legado —«eudoxiano»— constituye una teoría de magnitudes proporcionales, al margen de su conmensurabilidad/inconmensurabilidad, que pasará a la historia como «la concepción griega» de la proporción.

La teoría euclídea de la proporción reviste sumo interés desde al menos tres puntos de vista: el historiográfico, el sistemático y el de su recepción y transmisión posterior. Es importante, en primer lugar, para comprender el desarrollo de la matemática griega antes de que ésta quedara

PROPOSICIÓN 2

Si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta.

Pues sea la primera (magnitud), AB, el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la tercera, ΔE, de la cuarta, Z, y sea la



quinta, BH, el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la sexta, EΘ, de la cuarta, Z.

---

marcada por la obra de Euclides. Hoy no cabe aceptar sin reservas la imagen que los comentadores de Euclides —Proclo, en especial— han difundido de esa matemática anterior como una matemática tendenciosamente «pre-euclídea», llamada a encontrar su gozo y su corona en los *Elementos*. Antes he aludido a unas nociones precedentes, como la numérica de razón y la *anthyphairética* de proporción; ahora bien, la teoría de la proporcionalidad del libro V de los *Elementos* no es tanto una culminación como un olvido de esos posibles antecedentes (luego recobrados de modo parcial y un tanto sesgado en la aritmética del libro VII y en alguna proposición del libro X). La teoría generalizada de los *Elementos* parte de la proporción como una relación tetrádica entre magnitudes homogéneas (al

Digo que la suma de la primera y la quinta, AH, es el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la (suma de) la tercera y la sexta, ΔΘ, de la cuarta, Z.

---

menos, por parejas, conforme a la def. V, 3) «*a* es a *b* como *c* es a *d*», cuya representación más adecuada sería el esquema «*a* : *b* :: *c* : *d*» en lugar del esquema diádico habitual «(*a*, *b*) = (*c*, *d*), y donde la noción de razón parece haber perdido su anterior entidad propia. Son sintomáticas la vaguedad alusiva de la def. 3 o las funciones más denominativas que operativas de otras definiciones que envuelven la idea de razón (e.g. las defs. V, 14-16); no faltan incluso definiciones equívocas que en apariencia hablan de razones cuando, en realidad, se refieren a proporciones o a variaciones que preservan la proporcionalidad (e.g. las defs. V, 12, o V, 17). Así pues, dos cuestiones significativas desde el punto de vista historiográfico son la peculiar «integración» del concepto de razón en esta nueva teoría generalizada de la proporción y las relaciones entre esta versión «clásica» de la proporcionalidad y otras posibles alternativas marginales, como la *anthyphairética*. Una cuestión adicional es la suscitada por las relaciones de filiación entre el legado presuntamente original de Eudoxo y la teoría expuesta en los *Elementos*. A la luz de alguna indicación de Aristóteles (e.g. en *Analíticos Segundos*, 74a17) y de las precisiones adoptadas luego por Arquímedes, cabe sospechar que la versión de Euclides difiere de las nociones avanzadas por Eudoxo más de lo que dan a entender los escoliastas del libro V que lo presentan como un hallazgo o una invención cabal de Eudoxo mismo.

La teoría tiene, en segundo lugar, la importancia sistemática que se deriva del intrigante juego entre sus bases expresas y sus suposiciones tácitas. De hecho, la explicitación y la reconstrucción estructural del núcleo de principios (axiomas y definiciones) de la teoría han venido a ser —ya desde su recepción árabe— una poderosa tentación para los mejores comentadores del libro V. Tanto es así que un criterio tradicional de la calidad de una versión o un comentario de los *Elementos* ha sido justamente el grado de comprensión y de penetración mostrado con respecto a esta teoría. Simson, por ejemplo, en su cuidada edición de 1756, se considera obligado a explicitar o añadir cuatro axiomas a las definiciones euclídeas:

«I) Las cantidades equimultíplices de una misma cantidad, o de cantidades iguales, son entre sí iguales.

II) Las cantidades, de las cuales una misma cantidad es equimultíplice o cuyas equimultíplices son iguales, son también iguales entre sí.

Pues, dado que AB es el mismo múltiplo de Γ que ΔE de Z, entonces, cuantas (magnitudes) hay en AB iguales a Γ,

---

III) La multíplice de una cantidad mayor es mayor que la equimultíplice de una menor.

IV) La cantidad, cuya multíplice es mayor que la equimultíplice de otra, es mayor que ésta» (R. SIMSON, ed. española, Madrid, 1774, págs. 144-145 —*vid.* el listado de la «Introducción general» a EUCLIDES, *Elementos* I-IV (núm. 155 de la B.C.G.), VI, núm. 16—. Sobre la reconstrucción hoy establecida de su núcleo conceptual y deductivo pueden verse I. MUELLER, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Cambridge (Mass.)-Londres, 1981, 3, §§ 3.1-3.2, págs. 134-148; L. VEGA, *La trama de la demostración*, Madrid, 1990, 4, § 4.2, págs. 329-330.

La teoría tiene, en fin, la trascendencia histórica que le han deparado las circunstancias de su recepción y transmisión, en particular a través de las versiones arábigo-latinas de la Edad Media. No estará de más recordar que la depuración de algunas interpolaciones y confusiones debidas a esta tradición y difundidas por la influyente edición de Campano —por ejemplo, una definición espuria y abstrusa de «proporción continua»—, así como la explicitación progresiva de los supuestos operativos en la teoría, marcaron el desarrollo de la crítica textual de los *Elementos* antes de la —digamos— «revolución filológica» del s. XIX; las ediciones de Comandino (1572, 1575) o de Simson (1756) son brillantes muestras. Cuenta además con el interés añadido de haber contribuido a una incipiente matematización de la filosofía natural a través de, por ejemplo, Bradwardine (en la primera mitad del s. XIII) y Oresme (en la segunda mitad del s. XIV). E incluso, de creer a Lipschitz y a Dedekind (amén de algunos historiadores de nuestro tiempo), no habría sido ajena a la moderna fundamentación de los números reales mediante la reducción de un número irracional a una «cortadura» en el conjunto ordenado de los números racionales, en la medida en que esta «cortadura» equivaldría a la que una razón entre magnitudes inconmensurables pudiera suponer en el contexto de la definición V, 5: bastaría (según dicen esos historiadores) asociar a una relación a/b irracional una partición en dos clases de números racionales m/n, los que son tales que $mb > ma$ y los que son tales que $mb < ma$. Pero esta adaptación de la definición euclídea, aun siendo algebraicamente viable, no dejaría de ser un trasplante demasiado forzado en un marco tan alejado de los *Elementos* como los problemas de fundamentación y reducción de la teoría matemática del s. XIX.

tantas hay también en ΔΕ iguales a Ζ. Y, por lo mismo, cuantas (magnitudes) hay en ΒΗ iguales a Γ, tantas hay también en ΕΘ iguales a Ζ; así pues, cuantas (magnitudes) hay en la (magnitud) entera ΑΗ iguales a Γ, tantas hay también en la (magnitud) entera ΔΘ iguales a Ζ; por tanto, cuantas veces ΑΗ es múltiplo de Γ, tantas veces lo será ΔΘ de Ζ. Luego la suma de la primera y la quinta, ΑΗ, será también el mismo múltiplo de la segunda, Γ, que la (suma de) la tercera y la sexta, ΔΘ, de la cuarta, Ζ.

Por consiguiente, si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta. Q. E. D.

Proposición 3

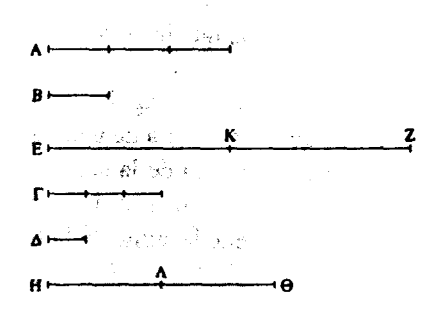
Si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad[20]

Por lo demás, la teoría del libro V no necesita galas ajenas para brillar con luz propia en el contexto de los *Elementos*. Y bien se puede terminar esta desmesurada nota introductoria con lo que dice Simson como remate de sus anotaciones al libro V: «... concluida ya la enmienda del libro V, por fin de él asiento gustosísimo a la opinión de Cl. Barrow: es a saber 'que nada hay en toda la Obra de los *Elementos* inventado con mayor sutileza, establecido con más solidez, ni tratado con más exactitud que la doctrina de las proporcionales'» (R. Simson, *op. cit.*, pág. 322).

[20] Como Heiberg señala, el uso de *di'ísou* no hace referencia aquí a la definición 17 de «razón por igualdad». Se trata, no obstante, de un uso suficientemente parejo como para justificar su empleo en este enunciado.

cada una de las dos (magnitudes) tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda, y la otra de la cuarta.

Pues sea la primera, A, el mismo múltiplo de la segunda, B, que la tercera, Γ, de la cuarta, Δ, y tómense los equimúltiplos EZ, HΘ de A, Γ.



Digo que EZ es el mismo múltiplo de B que HΘ de Δ.

Pues dado que EZ es el mismo múltiplo de A que EZ de Γ, entonces, cuantas (magnitudes) hay en EZ iguales a A, tantas hay también en HΘ iguales a Γ. Divídase EZ en las magnitudes EK, KZ iguales a A, y HΘ en las (magnitudes) HΛ, ΛΘ iguales a Γ. Entonces el número de las (magnitudes) EK, KZ será igual al número de las (magnitudes) HΛ, ΛΘ. Y puesto que A es el mismo múltiplo de B que Γ de Δ, mientras que EK es igual a A y HΛ a Γ, entonces EK es el mismo múltiplo de B que HΛ de Δ. Por lo mismo KZ es el mismo múltiplo de B que ΛΘ de Δ. Así pues, dado que la primera, EK, es el mismo múltiplo de la segunda, B, que la tercera, HΛ, de la cuarta, Δ, y la quinta, KZ, también es el mismo múltiplo de la segunda, B, que la sexta, ΛΘ, de la cuarta, Δ; entonces la suma de la primera y la quinta, EZ, es también el mismo múltiplo de la segunda, B, que la (suma de) la tercera y la sexta, HΘ, de la cuarta, Δ [V, 2].

Por consiguiente, si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también, por igualdad, cada una de las dos (magnitudes) tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda y la otra de la cuarta. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 4

Si una primera (magnitud) guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente.

Pues guarde la primera (magnitud), A, la misma razón con la segunda, B, que la tercera, Γ, con la cuarta, Δ, y tómense los equimúltiplos E, Z de A, Γ, y otros equimúltiplos tomados al azar[21] H, Θ, de B, Δ.

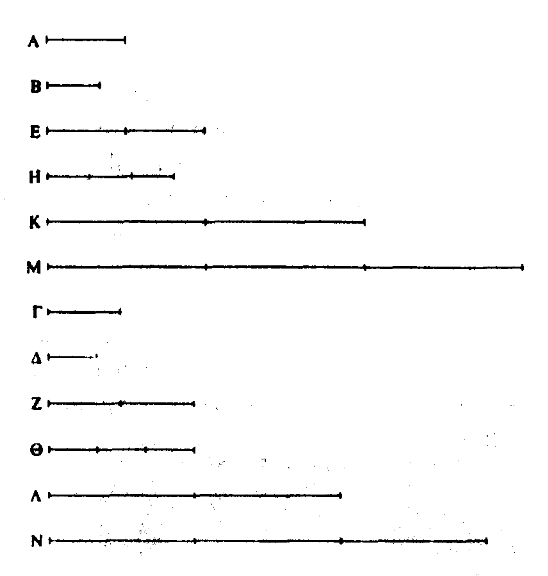
Digo que como E es a H, así Z es a Θ.

Pues tómense los equimúltiplos K, Λ de E, Z, y otros equimúltiplos tomados al azar, M, N de H, Θ.

Dado que E es el mismo múltiplo de A que Z de Γ, y se han tomado los equimúltiplos K, Λ de E, Z, entonces K es el mismo múltiplo de A que Λ de Γ [V, 3]. Por lo mismo M es el mismo múltiplo de B que N de Δ. Ahora bien, puesto que A es a B como Γ a Δ, y se han tomado los equimúltiplos K, Λ de

[21] La versión tradicional de *hà étychen* por «cualesquiera» sería problemática en ciertos casos y encubriría el tono informal —desde el punto de vista lógico— del texto griego original. Por ello opto por la traducción «al azar».

A, Γ y otros equimúltiplos tomados al azar M, N de B, Δ, entonces, si K excede a M, Λ también excede a N, y si es igual,



es igual, y si menor, menor [V, Def. 5]. Ahora bien, K, Λ son equimúltiplos de E, Z, y M, N otros equimúltiplos tomados al azar de H, Θ; por tanto como E es a H, así Z a Θ [V, Def. 5].

Por consiguiente, si una primera (magnitud) guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente. Q. E. D.

Proposición 5

Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra que una (magnitud) quitada (a la primera) lo es de otra quitada (a la segunda), la (magnitud) restante (de la primera) será también el mismo múltiplo de la (magnitud) restante (de la segunda) que la (magnitud) entera de la (magnitud) entera.

Pues sea la magnitud AB el mismo múltiplo de la (magnitud) ΓΔ que la (magnitud) quitada AE de la (magnitud) quitada ΓZ.

Digo que la (magnitud) restante EB será también el mismo múltiplo de la (magnitud) restante ZΔ que la (magnitud) entera AB de la (magnitud) entera ΓΔ.

Así pues, cuantas veces sea AE múltiplo de ΓZ, tantas veces lo sea EB de ΓH[22].

Y dado que AE es el mismo múltiplo de ΓZ que EB de HΓ, entonces AE es el mismo múltiplo de ΓZ que AB de HZ [V, 1]. Pero se ha asumido[23] que AE sea el mismo múltiplo de ΓZ que AB de ΓΔ. Por tanto, AB es el mismo múltiplo de cada una de las dos (magnitudes) HZ, ΓΔ; luego HZ es igual a ΓΔ. Quítese de ambas ΓZ; entonces la restante HΓ es igual a la restante ZΔ. Y puesto que AE es el mismo múltiplo de ΓZ que EB de HΓ, y

[22] Esta manera de expresar la construcción podría dar a entender que ΓH es una magnitud dada, mientras que EB debe ser hallada de modo que sea igual a cierto múltiplo de ΓH. Sin embargo, EB es la que ha sido dada y ΓH la que hay que hallar. Es decir, que ΓH debe ser construida como un submúltiplo de EB.

[23] *Keîtai* más literalmente: «se ha puesto».

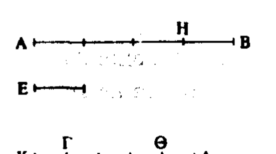
HΓ es igual a ΔZ, entonces AE es el mismo múltiplo de ΓZ que EB de ZΔ. Pero se ha supuesto que AE es el mismo múltiplo de ΓZ que AB de ΓΔ; por tanto EB es el mismo múltiplo de ZΔ que AB de ΓΔ. Luego la restante (magnitud) EB también será el mismo múltiplo de ZΔ que la (magnitud) entera AB de la (magnitud) entera ΓΔ.

Por consiguiente, si una magnitud es el mismo múltiplo de otra que una (magnitud) quitada (a la primera) lo es de otra quitada (a la segunda), la (magnitud) restante (de la primera) será también el mismo múltiplo de la (magnitud) restante (de la segunda) que la (magnitud) entera de la (magnitud) entera. Q. E. D.

Proposición 6

Si dos magnitudes son equimúltiplos de dos magnitudes y ciertas (magnitudes) quitadas (de ellas) son equimúltiplos de estas (dos segundas), las restantes también son o iguales a las mismas o equimúltiplos de ellas.

Pues sean dos magnitudes AB, ΓΔ equimúltiplos de dos magnitudes E, Z, y sean las (magnitudes) quitadas AH, ΓΘ equimúltiplos de las mismas E, Z.



Digo que las (magnitudes) restantes HB, ΘΔ también son iguales a E, Z o equimúltiplos de ellas.

Pues sea en primer lugar HB igual a E.

Digo que ΘΔ es también igual a Z.

Así pues, hágase ΓK igual a Z. Dado que AH es el mismo múltiplo de E que ΓΘ de Z, y que

HB es igual a E y KΓ a Z, entonces AB es el mismo múltiplo de E que KΘ de Z [V, 2]. Pero se ha supuesto que AB es el mismo múltiplo de E que ΓΔ de Z; por tanto KΘ es el mismo múltiplo de Z que ΓΔ de Z. Así pues, dado que cada una de las (magnitudes) KΘ, ΓΔ es el mismo múltiplo de Z, entonces KΘ es igual a ΓΔ. Quítese de ambos ΓΘ; entonces la (magnitud) restante KΓ es igual a la (magnitud) restante ΘΔ. Pero Z es igual a KΓ; entonces ΘΔ también es igual a Z. De modo que si HB es igual a E, también ΘΔ será igual a Z.

De manera semejante demostraríamos que, si HB es múltiplo de E, ΘΔ será también el mismo múltiplo de Z[24].

Por consiguiente, si dos magnitudes son equimúltiplos de dos magnitudes, y ciertas (magnitudes) quitadas (de ellas) son equimúltiplos de estas (dos segundas), las restantes también son o iguales a las mismas o equimúltiplos de ellas. Q. E. D.[25]

---

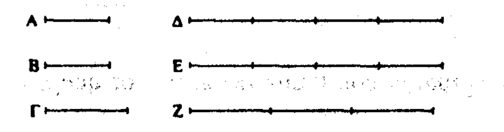
[24] Lit.: «si es múltiplo de... tantas veces lo será...».

[25] R. Simson se cree obligado a añadir, tras esta proposición, cuatro proposiciones derivadas de la Def. V, 5, que obran tácitamente no sólo en algunas pruebas de este mismo libro, sino en otras aplicaciones de la teoría de la proporción en los *Elementos*. Son los teoremas siguientes. A: «Si la primera cantidad [i.e., magnitud] tiene a la segunda la misma razón que la tercera a la cuarta, será la tercera mayor, igual o menor que la cuarta según sea la primera mayor, igual o menor que la segunda». B: «Si cuatro cantidades fueren proporcionales, también inversamente serán proporcionales». C: «Si la primera cantidad fuese igual multíplice o la misma parte de la segunda que la tercera lo es de la cuarta, la primera será a la segunda como la tercera a la cuarta». D: «Si la primera cantidad fuese a la segunda como la tercera a la cuarta, y la primera fuese multíplice o parte de la segunda, la tercera será la misma multíplice o la misma parte de la cuarta» (SIMSON, ed. cit., págs. 121-123, y notas, págs. 312-314). Las razones de Simson para estas adiciones parecen más pendientes de los comentarios suscitados por la presentación de Euclides que de la teoría misma del libro V.

Proposición 7

Las (magnitudes) iguales guardan la misma razón con una misma (magnitud) y la misma (magnitud) guarda la misma razón con las (magnitudes) iguales.

Sean Α, Β las magnitudes iguales y Γ otra, tomada al azar[26].



Digo que cada una de las (magnitudes) Α, Β guarda la misma razón con Γ y Γ con cada una de las (magnitudes) Α, Β.

Pues tómense los equimúltiplos Δ, Ε de Α, Β y otro equimúltiplo al azar, Ζ de Γ.

Así pues, dado que Δ es el mismo múltiplo de Α que Ε de Β, y Α es igual a Β, entonces Δ es también igual a Ε. Pero Ζ es otra (magnitud) tomada al azar. Entonces, si Δ excede a Ζ, Ε también excede a Ζ, y si es igual es igual, y si es menor, menor. Ahora bien, Δ, Ε son equimúltiplos de Α, Β, y Ζ otro equimúltiplo, al azar, de Γ; entonces, como Α es a Γ, así Β es a Γ [V, Def. 5]

Digo que Γ guarda también la misma razón con cada una de las (magnitudes) Α, Β.

---

[26] Se trata del mismo uso de *hà étychen* que en la proposición 4. Cf. nota 21.

Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de manera semejante que Δ es igual a E; pero Z es alguna otra (magnitud), entonces, si Z excede a Δ, excede también a E, y si es igual, también es igual, y si es menor, menor. Ahora bien, Z es múltiplo de Γ, mientras que Δ, E son otros equimúltiplos, tomados al azar de A, B; por tanto, como Γ es a A, así Γ es a B [V, Def. 5].

Por consiguiente, las (magnitudes) iguales guardan la misma razón con una misma (magnitud) y la misma (magnitud) (guarda la misma razón) con las (magnitudes) iguales.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si algunas magnitudes son proporcionales, también son proporcionales por inversión [V, Def. 13]. Q. E. D.

Proposición 8

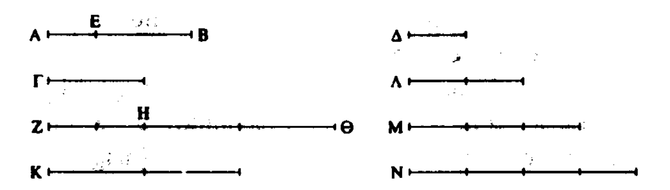
De magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma (magnitud) una razón mayor que la menor, y la misma (magnitud) guarda con la menor una razón mayor que con la mayor.

Sean AB, Γ magnitudes desiguales, y sea la mayor AB, y otra, al azar, Δ.

Digo que AB guarda con Δ una razón mayor que Γ con Δ, y Δ guarda con Γ una razón mayor que con AB.

Pues como AB es mayor que Γ, hágase BE igual a Γ, entonces la menor de las (magnitudes) AE, EB, multiplicada, será alguna vez mayor que Δ [V, Def. 4]. En primer lugar, sea AE menor que EB, y multiplíquese AE, y sea su múltiplo ZH que es mayor que Δ, y, cuantas veces ZH es múltiplo de

AE, tantas veces lo sea también HΘ de EB y K de Γ; tómese Λ doble de Δ y M triple (de Δ), y así sucesivamente[27] hasta que el múltiplo tomado de Δ sea el primero mayor que K. Tómese y sea N, el cuádruplo de Δ, el primero mayor que K.



Así pues, dado que K es el primero menor que N, entonces K no es menor que M; y, dado que ZH es el mismo múltiplo de AE que HΘ de EB, entonces ZH es el mismo múltiplo de AE que ZΘ de AB [V, 1]. Ahora bien, ZH es el mismo múltiplo de AE que K de Γ; luego ZΘ es el mismo múltiplo de AB que K de Γ. Por tanto ZΘ, K son equimúltiplos de AB, Γ. Como HΘ es a su vez el mismo múltiplo de EB que K de Γ, y EB es igual a Γ, entonces HΘ es también igual a K; pero K no es menor que M; por tanto HΘ tampoco es menor que M. Pero ZH es mayor que Δ; así pues, la (magnitud) entera ZΘ es mayor que Δ y M juntas.

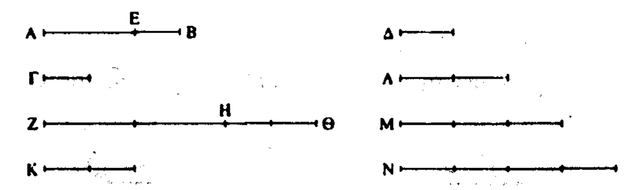
Ahora bien, Δ y M juntas son iguales a N, puesto que M es efectivamente el triple de Δ, mientras que M y Δ juntas son el cuádruple de Δ, y N es también el cuádruple de Δ; por tanto M y Δ juntas son iguales a N. Pero ZΘ es mayor que M, Δ; luego ZΘ excede a N; mientras que K no excede a N. Y ZΘ, K son equimúltiplos de AB, Γ, mientras que N es otro (múltiplo), tomado al azar, de Δ; por consiguiente AB guarda una razón mayor con Δ que Γ con Δ [V, Def. 7].

---

[27] *Kaì hexès henì pleîon*, en el sentido de múltiplos sucesivamente incrementados de uno en uno.

Digo además que Δ guarda también una razón mayor con Γ que Δ con AB.

Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de manera semejante que N excede a K, mientras que N no excede a ZΘ. Y N es múltiplo de Δ, mientras que ZΘ, K son otros equimúltiplos tomados al azar de AB, Γ; por consi-



guiente Δ guarda con Γ una razón mayor que Δ con AB [V, Def. 7].

Sea ahora AE mayor que EB. Entonces la menor EB, multiplicada, será alguna vez mayor que Δ [V, Def. 4]. Multiplíquese y sea HΘ un múltiplo de EB, y mayor que Δ; y, cuantas veces HΘ es múltiplo de EB, tantas veces sea también ZH múltiplo de AE y K de Γ. De manera semejante demostraríamos que ZΘ, K son equimúltiplos de AB, Γ; tómese parejamente N como múltiplo de Δ y el primero mayor que ZH; de modo que de nuevo ZH no es menor que M, y HΘ es mayor que Δ; entonces la (magnitud) entera ZΘ excede a Δ, M, es decir a N. Pero K no excede a N, puesto que ZH que es mayor que HΘ, es decir que K, tampoco excede a N. Y del mismo modo siguiendo los pasos de arriba completamos la demostración.

Por consiguiente, de las magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma (magnitud) una razón mayor que la menor; y la misma (magnitud) guarda con la menor una razón mayor que con la mayor. Q. E. D.

Proposición 9

Las (magnitudes) que guardan con una misma (magnitud) la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma (magnitud) guarda la misma razón, son iguales.

Pues guarde cada una de las (magnitudes) A, B la misma razón con Γ.

Digo que A es igual a B.

Pues, si no, cada una de las (magnitudes) A, B no guardaría la misma razón con Γ [V, 8]; pero la guarda; luego A es igual a B.

Guarde a su vez Γ la misma razón con cada una de las (magnitudes) A, B.

Digo que A es igual a B.

Pues, si no, Γ no guardaría la misma razón con cada una de las (magnitudes) A, B [V, 8]; pero la guarda; luego A es igual a B.

Por consiguiente, las (magnitudes) que guardan con una misma (magnitud) la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma (magnitud) guarda la misma razón, son iguales. Q. E. D.

Proposición 10

De las (magnitudes) que guardan razón con una misma (magnitud), la que guarda una razón mayor, es mayor. Y

aquella con la que la misma (magnitud) guarda una razón mayor, es menor.

Pues guarde A con Γ una razón mayor que B con Γ.

Digo que A es mayor que B.

Pues, si no, o A es igual a B o es menor. Ahora bien, A no es igual a B: pues (entonces) cada una de las (magnitudes) A, B guardaría la misma razón con Γ [V, 7]; pero no la guarda; luego A no es igual a B. Ahora bien, A tampoco es menor que B: pues (entonces) A guardaría con Γ una razón menor que B con Γ [V, 8]; pero no la guarda; luego A no es menor que B. Y se ha demostrado que tampoco es igual. Por tanto A es mayor que B.

A B Γ

Guarde a su vez Γ con B una razón mayor que Γ con A.

Digo que B es menor que A.

Pues, si no, o es igual o es mayor. Ahora bien, B no es igual a A: pues (entonces) Γ guardaría con cada una de las (magnitudes) A, B la misma razón [V, 7]; pero no la guarda; luego A no es igual a B. Ahora bien, tampoco B es mayor que A: pues (entonces) Γ guardaría una razón menor con B que con A [V, 8]; pero no la guarda; luego B no es mayor que A. Y se ha demostrado que tampoco es igual; por tanto B es menor que A.

Por consiguiente, de las (magnitudes) que guardan razón con una misma (magnitud), la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma (magnitud) guarda mayor razón, es menor. Q. E. D.[28].

---

[28] En esta proposición introduce Euclides unas nociones de razón mayor o menor en un contexto en el que la referencia a la def. V, 7, puede ser insuficiente. Como se ha observado reiteradamente (desde SIMSON, 1756 —*vid.* ed. cit., notas, págs. 315-317—; cf. HEATH, ed. cit., II, págs. 156-157), no se deben aplicar de modo inmediato a las razones las condiciones estipuladas o supuestas para las magnitudes, en particular la condición de

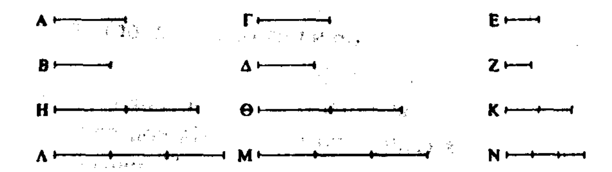
Proposición 11

Las razones que son iguales a una misma razón son también iguales entre sí[29].

Pues, como A es a B sea así Γ a Δ, y, como Γ es a Δ así E a Z.

Digo que como A es a B así E es a Z.

Tómense los equimúltiplos H, Θ, K de A, Γ, E y otros equimúltiplos, tomados al azar, Λ, M, N de B, Δ, Z.



Y puesto que como A es a B, así Γ es a Δ, y se han tomado los equimúltiplos H, Θ de A, Γ, y otros equimúltiplos, tomados al azar, Λ, M de B, Δ, entonces, si H excede a Λ, también Θ excede a M, y si es igual, es igual, y si menor, menor.

---

tricotomía o el corolario destacado por Simson: que una magnitud no puede ser a la vez mayor o menor que otra (Simson, ed. cit., pág. 316). El propio Euclides vendrá a probar en la proposición siguiente que las razones iguales a una misma razón son iguales entre sí, pese a disponer de la noción común 1 («las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí»); en esta prop. V 11, Euclides, en vez de considerar una aplicación directa de esta noción común, desarrollará una prueba específica de la igualdad entre razones.

[29] Por razones estilísticas traduzco *hoi autoí* por «iguales», pues en este caso son expresiones equivalentes. Sigo, por otra parte, al traductor anónimo de Simson.

Asimismo, puesto que E es a Z como Γ es a Λ, y se han tomado los equimúltiplos Θ, K de Γ, E y otros equimúltiplos, tomados al azar, M, N de Δ, Z, entonces, si Θ excede a M, también K excede a N, y si es igual, es igual, y si menor, menor. Pero si Θ excede a M, también H excede a Λ, y si es igual, es igual, y si menor, menor; de modo que, si H excede a Λ, K excede también a N, y si es igual, es igual, y si menor, menor. Ahora bien, H, K son equimúltiplos de A, E, y Λ, N otros equimúltiplos, tomados al azar, de B, Z; por tanto, como A es a B, así E a Z.

Por consiguiente, las razones que son iguales a una misma razón, también son iguales entre sí. Q. E. D.

Proposición 12

Si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes[30].

Sean A, B, Γ, Δ, E, Z un número cualquiera de magnitudes proporcionales, (de modo que) como A es a B, así son Γ a Δ y E a Z.

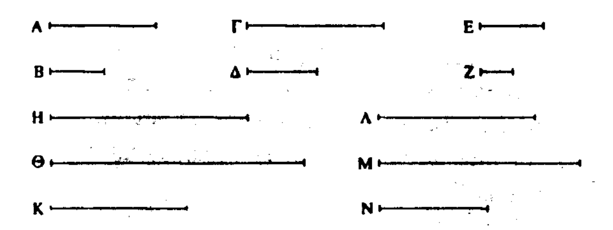
Digo que como A es a B, así serán A, Γ, E a B, Δ, Z.

Tómense pues los equimúltiplos H, Θ, K de A, Γ, E y otros equimúltiplos, tomados al azar, Λ, M, N de B, Δ, Z.

---

[30] Expresión algebraica: si $a : a' :: b : b' :: c : c'$..., cada razón es igual a la razón $(a + b + c + ...) : (a' + b' + c' ...)$. Este teorema aparece en Aristóteles, *Ética Nicomáquea* V 5 1131b14, en la forma abreviada: «El todo es al todo como cada parte es a cada parte».

Ahora bien, puesto que Γ es a Δ y E a Z como A es a B; y se han tomado los equimúltiplos H, Θ, K de A, Γ, E; y otros



equimúltiplos, tomados al azar, Λ, M, N de B, Δ, Z; entonces, si H excede a Λ, también Θ a M y K a N, y si es igual, igual, y si menor, menor. De modo que, si H excede a Λ, también H, Θ, K (exceden) a Λ, M, N, y si es igual, (son) iguales, y si menor, menores. Tanto H como H, Θ, K son equimúltiplos de A y de A, Γ, E, pues, en efecto, si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una de las magnitudes es múltiplo de otra, tantas veces lo serán también todas de todas [V, 1].

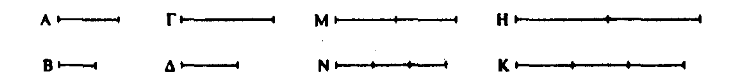
Por la misma razón, tanto Λ como Λ, M, N son equimúltiplos de B y de B, Δ, Z; luego, como A es a B, así A, Γ, E a B, Δ, Z [V, Def. 5].

Por consiguiente, si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 13

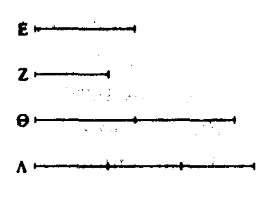
Si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con la sexta.

Guarde pues la primera, A, con la segunda, B, la misma razón que la tercera, Γ, con la cuarta, Δ; y guarde la tercera, Γ, con la cuarta, Δ, una razón mayor que la quinta, E, con la sexta, Z.



Digo que la primera, A, guardará también con la segunda, B, una razón mayor que la quinta, E, con la sexta, Z.

Pues como hay algunos equimúltiplos de Γ, E y otros equimúltiplos, tomados al azar, de Δ, Z, tales que el múltiplo de Γ excede al múltiplo de Δ pero el múltiplo de E no excede al múltiplo de Z [V, Def. 7], tómense y sean H, Θ equimúltiplos de Γ, E; y K, Λ otros equimúltiplos al azar de Δ, Z, de modo que H exceda a K pero Θ no exceda a Λ; y cuantas veces H sea múltiplo de Γ, tantas veces lo sea también M de A, y cuantas veces sea múltiplo K de Δ, tantas veces lo sea también N de B.



Y puesto que Γ es a Δ como A es a B, y se han tomado los equimúltiplos M, H de A, Γ y otros equimúltiplos, tomados al azar, N, K de B, Δ, entonces, si M excede a N, también H excede a K, y si es igual, es igual, y si menor, menor [V, Def. 5]. Pero H excede a K; luego M también excede a N. Ahora bien, Θ no excede a Λ; y M, Θ son equimúltiplos de A, E, mientras que N, Λ (son) otros equimúltiplos, tomados al azar, de B, Z; luego A guarda con B una razón mayor que E con Z [V, Def. 7].

Por consiguiente, si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con la sexta. Q. E. D.

Proposición 14

Si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si menor, menor.

Guarde pues la primera, A, con la segunda, B, la misma razón que la tercera, Γ, con la cuarta, Δ, y sea A mayor que Γ.

Digo que también B es mayor que Δ.

Pues como A es mayor que Γ y B otra (magnitud), tomada al azar, entonces A guarda una mayor razón con B que Γ con B [V, 8]. Pero como A es a B, así Γ es a Δ; entonces Γ guarda también con Δ una razón mayor que Γ con B [V, 13]. Ahora bien, aquella con la que una

misma magnitud guarda una razón mayor, es menor [V, 10]; así pues, Δ es menor que B; de modo que B es mayor que Δ.

De manera semejante demostraríamos que si A es igual a Γ, B también será igual a Δ y si A es menor que Γ, B será también menor que Δ.

Por consiguiente, si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, igual, y si menor, menor. Q. E. D.[31].

PROPOSICIÓN 15

Las partes guardan la misma razón entre sí que sus mismos múltiplos[32]*, tomados en el orden correspondiente.*

Sea pues AB el mismo múltiplo de Γ que ΔE de Z.

Digo que como Γ es a Z, así AB a ΔE.

Pues dado que AB es el mismo múltiplo de Γ que ΔE de Z, entonces, cuantas magnitudes iguales a Γ hay en AB, otras tantas (habrá) iguales a Z en ΔE.

Divídase AB en las (magnitudes) AH, HΘ, ΘB iguales a Γ, y ΔE en las (magnitudes) ΔK, KΛ, ΛE iguales a Z; entonces el número de las (magnitudes) AH, HΘ, ΘB será igual al número de las (magnitudes) ΔK, KΛ, ΛE. Y puesto que AH, HΘ, ΘB son iguales

A H Θ B Γ
Δ K Λ E Z

[31] Simson añade la prueba específica del segundo y tercer caso de esta proposición, a saber: si A es igual o menor que Γ. Cf. SIMSON, ed. cit., pág. 131.

[32] En griego: *hosaútōs pollaplasíois*.

entre sí y ΔK, KΛ, ΛE son también iguales entre sí, entonces, como AH es a ΔK, así HΘ a KΛ, y ΘB a ΛE [V, 7]. Por tanto, como una de las antecedentes es a una de las consecuentes, así todas las antecedentes serán también a todas las consecuentes [V, 12]; entonces, como AH es a ΔK, así AB a ΔE. Ahora bien, AH es igual a Γ, y ΔK a Z; luego, como Γ es a Z, así AB a ΔE.

Por consiguiente, las partes guardan la misma razón entre sí que sus mismos múltiplos tomados en el orden correspondiente. Q. E. D.

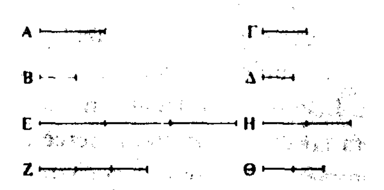
Proposición 16

Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.

Sean A, B, Γ, Δ, cuatro magnitudes proporcionales, (a saber) como A es a B, así Γ a Δ.

Digo que lo serán también por alternancia, (a saber) como A es a Γ así B a Δ.

Tómense los equimúltiplos E, Z de A, B y otros equimúltiplos, tomados al azar, H, Θ de Γ, Δ. Y puesto que E es el



mismo múltiplo de A que Z de B, las partes guardan la misma razón que sus mismos múltiplos [V, 15]; entonces, como A es a B así E a Z. Pero como A es a B, así Γ a Δ; luego, co-

mo Γ es a Δ, así también E a Z [V, 11]. A su vez, puesto que H, Θ son equimúltiplos de Γ, Δ, entonces, como Γ es a Δ, así H a Θ [V, 15]. Pero como Γ es a Δ así E a Z; luego como E es a Z, así también H a Θ [V, 11]. Ahora bien, si cuatro magnitudes son proporcionales, y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, igual, y si es menor, menor [V, 14]. Por tanto, si E excede a H, también Z excede a Θ, y si es igual, es igual, y si menor, menor. Ahora bien, E, Z son equimúltiplos de A, B, y H, Θ, otros (equimúltiplos), tomados al azar, de Γ, Δ; luego, como A es a Γ, así B a Δ [V, Def. 5].

Por consiguiente, si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales. Q. E. D.

Proposición 17

Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por separación serán proporcionales[33].

Sean AB, BE, ΓΔ, ΔZ magnitudes proporcionales por composición (de modo) que como AB es a BE, así ΓΔ es a ΔZ.

Digo que también por separación serán proporcionales, de modo que, como AE sea a EB, así ΓZ será a ΔZ.

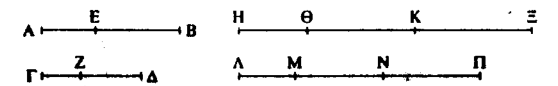
[33] Expresión algebraica:

si $a : b :: c : d$, entonces $(a - b) : b :: (c - d) : d$

Euclides emplea aquí *synkeímenos lógos* «razón compuesta» en el sentido de *sýnthesis lógou* «composición de una razón», lo que demuestra que ambos términos no están claramente definidos en los *Elementos*, cf. nota 13.

Pues tómense los equimúltiplos HΘ, ΘK, ΛM, MN de AE, EB, ΓZ, ZΔ y otros equimúltiplos, tomados al azar, KΞ, NΠ de EB, ZΔ.

Y dado que HΘ es el mismo múltiplo de AE que ΘK de EB, entonces HΘ es el mismo múltiplo de AE que HK de AB



[V, 1]. Pero HΘ es el mismo múltiplo de AE que ΛM de ΓZ; entonces HK es el mismo múltiplo de AB que ΛM de ΓZ. Como ΛM es a su vez el mismo múltiplo de ΓZ que MN de ZΔ, entonces ΛM es el mismo múltiplo de ΓZ que ΛN de ΓΔ [V, 1]. Pero ΛM era el mismo múltiplo de ΓZ que HK de AB; así pues HK es el mismo múltiplo de AB que ΛN de ΓΔ. Por tanto HK, ΛN son equimúltiplos de AB, ΓΔ. Como ΘK es a su vez el mismo múltiplo de EB que MN de ZΔ, y KΞ es también el mismo múltiplo de EB que NΠ de ZΔ, la suma ΘΞ es también el mismo múltiplo de EB que MΠ de ZΔ [V, 2]. Ahora bien, dado que, como AB es a BE, así ΓΔ es a ΔZ, y se han tomado los equimúltiplos HK, ΛN de AB, ΓΔ y los equimúltiplos ΘΞ, MΠ de EB, ZΔ, entonces, si HK excede a ΘΞ, ΛN excede también a MΠ, y si es igual, es igual, y si menor, menor. Exceda HK a ΘΞ; entonces, si se quita la (magnitud) común, ΘK, también HΘ excede a KΞ. Pero si HK excedía a ΘΞ, ΛN también excedía a MΠ; luego ΛN excede también a MΠ, y si se quita la (magnitud) común MN, ΛM también excede a NΠ; de modo que, si HΘ excede a KΞ, ΛM excede también a NΠ. De manera semejante demostraríamos que si HΘ es igual a KΞ, ΛM también será igual a NΠ, y si es menor, será menor. Ahora bien, HΘ, ΛM son equimúltiplos de AE, ΓZ, pero KΞ, NΠ son otros equimúltiplos tomados al azar de EB, ZΔ; por tanto, como AE es a EB, así ΓZ a ZΔ.

Por consiguiente, si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por separación serán proporcionales. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 18

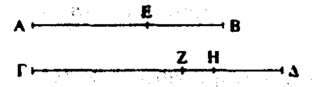
Si unas magnitudes son proporcionales por separación, también por composición serán proporcionales.

Sean AE, EB, ΓZ, ZΔ magnitudes proporcionales por separación, (de modo que) como AE es a EB, así ΓZ es a ZΔ.

Digo que también por composición serán proporcionales, (de modo que) como AB (es) a BE, así ΓΔ (será) a ΔZ.

Porque si ΓΔ no es a ΔZ como AB a BE, entonces, como AB es a BE, así ΓΔ será a una (magnitud) menor que ΔZ o a una mayor.

Sea en primer lugar proporcional a la menor ΔH. Dado que como AB es a BE, así ΓΔ es a ΔH, son magnitudes propor-



cionales por composición; así pues también serán proporcionales por separación [V, 17]. Por tanto, como AE es a EB, así ΓH a HΔ. Pero también se ha supuesto que como AE es a EB, así ΓZ a ZΔ. Luego, como ΓH es a HΔ, así ΓZ a ZΔ [V, 11]. Pero la primera ΓH es mayor que la tercera ΓZ; entonces la segunda HΔ también es mayor que la cuarta ZΔ [V, 14]. Pero también menor; lo cual es imposible; por tanto no es el caso de que ΓΔ sea a una (magnitud) menor que ZΔ, como AB a BE. De manera semejante demostraríamos que tampoco es

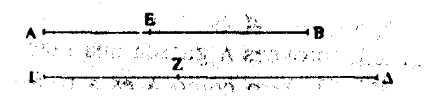
proporcional a una mayor; así pues será proporcional a la propia (ZΔ).

Por consiguiente, si unas magnitudes son proporcionales por separación, también por composición serán proporcionales. Q. E. D. [34].

PROPOSICIÓN 19

Si como un todo es a otro todo, así es una (parte) quitada (de uno) a una (parte) quitada (de otro), la (parte) restante será también a la (parte) restante como el todo es al todo.

Pues como el todo AB es al todo ΓΔ, así sea la (parte) quitada AE a la (parte) quitada ΓZ.



Digo que la (parte) restante EB será también a la (parte) restante ZΔ como el todo AB es al todo ΓΔ.

---

[34] La demostración supone la existencia de un cuarto término proporcional. Diversos editores y comentadores de los *Elementos*, al menos desde Clavio (1574, 2.ª ed. 1589), han optado por la declaración expresa de esa suposición a título de axioma. Otros han preferido la opción de una prueba independiente de dicho supuesto o la opción de demostrar previamente la suposición misma (HEATH, ed. cit., II, págs. 170-174, ofrece diversas muestras). El propio Euclides demostrará más adelante, en la prop. VI 12, un caso particular en el que los términos proporcionales son líneas rectas. Por lo demás, una vez asumida la existencia de una «cuarta proporcional», se podría derivar ulteriormente su unicidad a través de las proposiciones V 11 y V 9.

Pues, dado que como AB es a ΓΔ, así AE es a ΓZ, también, por alternancia, como BA es a AE, así ΔΓ a ΓZ [V, 16]. Y puesto que son magnitudes proporcionales por composición, también por separación serán proporcionales [V, 17] (es decir) como BE es a EA, así ΔZ a ΓZ; y, por alternancia, como BE es a ΔZ, así EA a ZΓ [V, 16]. Pero, como AE es a ΓZ, así se ha supuesto que el todo AB es al todo ΓΔ. Luego la (parte) restante EB será a la (parte) restante ZΔ como el todo AB es al todo ΓΔ [V, 11].

Por consiguiente, si como un todo es a otro todo, así es una (parte) quitada (de uno) a una (parte) quitada (del otro), la (parte) restante será también a la (parte) restante como el todo es al todo. Q. E. D.

[Y puesto que se ha demostrado que como AB es a ΓΔ, así EB a ZΔ, también por alternancia, como AB es a BE, así ΓΔ a ZΔ, luego son magnitudes proporcionales por composición; pero se ha demostrado que como BA es a AE, así ΔΓ es a ΓZ; y esto es por conversión][35].

Porisma:

A partir de esto queda claro que si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por conversión serán proporcionales. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 20

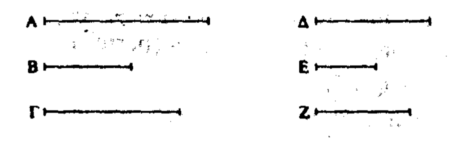
Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y si,

[35] Heiberg atetiza las líneas que se encuentran entre la conclusión y el porisma porque Euclides no acostumbra a explicar un porisma, ya que, por su propia naturaleza, un porisma no precisa explicación sino que es algo que se presenta, según Proclo, *apragmateútōs*, es decir, «sin esfuerzo».

por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual, y si es menor, menor.

Sean A, B, Γ tres magnitudes y Δ, E, Z otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guarden la misma razón, (es decir que) como A es a B, así Δ es a E y como B es a Γ, así E a Z, y, por igualdad, sea mayor A que Γ.

Digo que Δ será también mayor que Z, y si es igual, igual, y si es menor, menor.



Pues dado que A es mayor que Γ y B es otra (magnitud) cualquiera, la mayor guarda con una misma (magnitud) una razón mayor que la menor [V, 8], entonces A guarda con B una razón mayor que Γ con B. Pero como A es a B, así Δ es a E, y por inversión, como Γ es a B, así Z es a E; luego Δ también guarda con E una razón mayor que Z con E [V, 13]. Ahora bien, de las magnitudes que guardan razón con una misma (magnitud), la que guarda una razón mayor es mayor [V, 10]. Así pues Δ es mayor que Z. De manera semejante demostraríamos que, si A es igual a Γ, también Δ será igual a Z, y si es menor, menor.

Por consiguiente, si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual , igual, y si es menor, menor. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 21

Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón y su proporción es perturbada, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual; y si es menor, menor.

Sean Α, Β, Γ tres magnitudes y Δ, Ζ, Ε otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guarden la misma razón, y sea su proporción perturbada (es decir que) como Α es a Β, así Ε a Ζ, y como Β es a Γ, así Λ a Ε, y, por igualdad, sea Α mayor que Γ.

Digo que Δ también será mayor que Ζ, y si es igual, igual, y si es menor, menor.

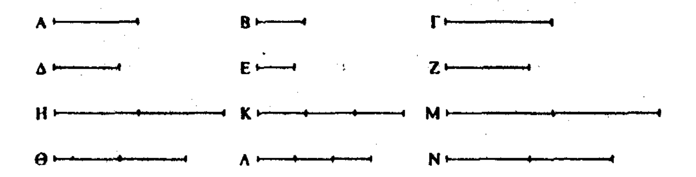
Pues como Α es mayor que Γ, y Β otra magnitud, entonces Α guarda una razón mayor con Β que Γ con Β [V, 8]. Pero como Α es a Β, así Ε a Ζ, y por inversión, como Γ es a Β, así Ε es a Δ. Por tanto Ε guarda una razón mayor con Ζ que Ε con Δ [V, 13]. Pero aquello con lo que una misma (magnitud) guarda una razón mayor es menor [V, 10], luego Ζ es menor que Λ, por tanto Δ es mayor que Ζ. De manera semejante demostraríamos que si Α es igual a Γ, Δ será también igual a Ζ, y si menor, menor.

Por consiguiente, si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada; y si, por igualdad la primera es mayor que la tercera, la cuarta será también mayor que la sexta; y si es igual, igual; y si es menor, menor. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 22

Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón.

Sean Α, Β, Γ un número cualquiera de magnitudes y Δ, Ε, Ζ otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guarden la misma razón (es decir que) como Α es a Β, así Δ es a Ε, y como Β es a Γ, así Ε es a Ζ.



Digo que por igualdad guardarán también la misma razón (*i. e.* que como Α es a Γ, así Δ es a Ζ).

Pues tómense los equimúltiplos Η, Θ de Α, Δ y otros equimúltiplos tomados al azar Κ, Λ de Β, Ε, y además otros equimúltiplos al azar Μ, Ν de Γ, Ζ.

Y dado que como Α es a Β, así Δ es a Ε, y se han tomado los equimúltiplos Η, Θ de Α, Δ y otros equimúltiplos tomados al azar Κ, Λ de Β, Ε, entonces como Η es a Κ así Θ a Λ [V, 4]. Por lo mismo, como Κ es a Μ, así Λ es a Ν. Así pues, dado que Η, Κ, Μ son tres magnitudes y Θ, Λ, Ν otras magnitudes iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, entonces, por igualdad, si Η excede a Μ, Θ también excede a Ν; y si es igual, es igual; y si es me-

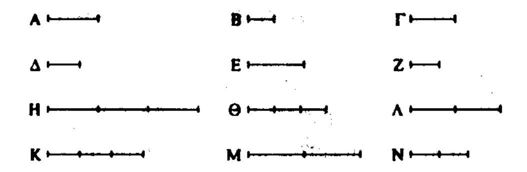
nor, menor [V, 20]. Ahora bien, H, Θ son equimúltiplos de A, Δ, y M, N otros equimúltiplos tomados al azar de Γ, Z. Entonces como A es a Γ, así Δ es a Z [V, Def. 5].

Por consiguiente, si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón. Q. E. D.

Proposición 23

Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón.

Pues sean A, B, Γ tres magnitudes y Δ, E, Z otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guarden la



misma razón y sea su proporción perturbada, (es decir que) como A es a B, así E a Z y como B es a Γ, así Δ a E.

Digo que como A es a Γ, así Δ es a Z.

Pues tómense los equimúltiplos H, Θ, K de A, B, Δ y otros equimúltiplos tomados al azar Λ, M, N de Γ, E, Z.

Y dado que H, Θ son equimúltiplos de A, B y las partes guardan la misma razón que sus mismos múltiplos [V,

15][36], entonces como A es a B, así H es a Θ. Por lo mismo, como E es a Z, así también M a N; ahora bien, como A es a B, así E a Z; entonces como H es a Θ, así M a N [V, 11]. Y dado que, como B es a Γ, así Δ a E, también, por alternancia, como B es a Δ, así Γ a E [V, 16]. Y puesto que Θ, K son equimúltiplos de B, Δ, y las partes guardan la misma razón que sus equimúltiplos, entonces como B es a Δ, así Θ a K [V, 15]. Ahora bien, como B es a Δ, así Γ a E; luego también como Θ es a K, así Γ a E [V, 11]. A su vez, dado que Λ, M son equimúltiplos de Γ, E, entonces, como Γ es a E, así Λ a M [V, 15]. Ahora bien, como Γ es a E, así Θ a K; luego también como Θ es a K, así Λ a M [V, 11]; y, por alternancia, como Θ es a Λ, así K es a M [V, 16]. Pero se ha demostrado también que como H es a Θ, así M a N.

Así pues, dado que H, Θ, Λ son tres magnitudes y K, M, N otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, entonces, por igualdad, si H excede a Λ, K también excede a N; y si es igual, es igual; y si menor, menor [V, 21]. Pero H, K son equimúltiplos de A, Δ, y Λ, N de Γ, Z. Por tanto, como A es a Γ, así Δ es a Z.

Por consiguiente, si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón. Q. E. D.[37].

---

[36] *Hosaútōs.*

[37] SIMSON (1756), ed. cit., pág. 141, presenta una prueba más sencilla que evita la reiterada mediación de las proposiciones V 11, 15, 16, y se sirve de una aplicación directa de la prop. V 4. Esta versión cuenta con el apoyo de algunos mss., aunque no con la autoridad de una fuente textual como el ms. P. En todo caso, es justa su observación de que el último paso de la prueba debe referirse a los equimúltiplos H, K —de A, Δ— y Λ, N —de Γ, Z—, como a equimúltiplos cualesquiera. El propio Simson gene-

PROPOSICIÓN 24

Si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas, guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta.

Pues guarde una primera (magnitud) AB con una segunda Γ la misma razón que una tercera ΔE con una cuarta Z; y guarde una quinta BH con la segunda, Γ, la misma razón que la sexta, EΘ, con la cuarta Z.

Digo que, tomadas juntas, la primera y la quinta, AH, guardarán la misma razón con la segunda, Γ, que la tercera y la sexta, ΔΘ, con la cuarta Z.

Dado que BH es a Γ como EΘ a Z, entonces, por inversión, como Γ es a BH, así Z a EΘ. Puesto que AB es a Γ como ΔE a Z, y, como Γ es a BH, así Z a EΘ, entonces, por igualdad, como AB es a BH, así ΔE a EΘ [V, 22]. Ahora bien, puesto que las magnitudes son proporcionales por separación, también serán proporcionales por composición [V, 18]; luego, como AH es a HB, así ΔΘ es a ΘE. Pero, como BH es a Γ, así EΘ a Z; luego, por igualdad, como AH es a Γ, así ΔΘ es a Z [V, 22].

---

ralizará el alcance de esta proposición a un número cualquiera de magnitudes (l. c., págs. 141-142).

Por consiguiente, si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que una sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas, guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta. Q. E. D.

Proposición 25

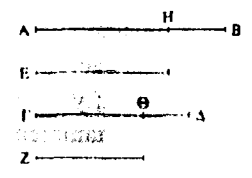
Si cuatro magnitudes son proporcionales, la mayor y la menor (juntas) son mayores que las dos restantes.

Sean AB, ΓΔ, E, Z cuatro magnitudes proporcionales, (es decir que) como AB es a ΓΔ, así E a Z; y sea la mayor de ellas AB y la menor Z.

Digo que AB, Z son mayores que ΓΔ, E.

Pues hágase AH igual a E y ΓΘ igual a Z.

Dado que, como AB es a ΓΔ, así E es a Z, y E es igual a AH, mientras que Z (es igual) a ΓΘ, entonces como AB es a ΓΔ, así AH es a ΓΘ. Ahora bien, ya que el todo AB es al todo ΓΔ como la (parte) quitada AH es a la (parte) quitada ΓΘ, entonces la (parte) restante HB será a la (parte) restante ΘΔ como el todo AB es al todo ΓΔ [V, 19]. Pero AB es mayor que ΓΔ; luego HB también (será) mayor que ΘΔ. Y dado que AH es igual a E y ΓΘ a Z, entonces AH, Z son iguales a ΓΘ, E. Y si, no siendo iguales HB, ΘΔ, y siendo mayor HB, se añaden AH, Z a HB y se añaden ΓΘ, E a ΘΔ, se sigue que AB, Z son mayores que ΓΔ, E.



Por consiguiente, si cuatro magnitudes son proporcionales, la mayor de ellas y la menor (juntas) son mayores que las dos restantes. Q. E. D.

LIBRO SEXTO

DEFINICIONES

1. Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales[38].

[2. (Dos) figuras están inversamente relacionadas cuando en cada una de las figuras hay razones antecedentes y consecuentes][39].

---

[38] ARISTÓTELES, *Analíticos Segundos* II 17, 99a13, dice que la semejanza (*tò hómoion*) de las figuras consiste quizá (*ísōs*) en que tengan sus lados proporcionales y sus ángulos iguales. El uso de *ísōs* sugiere que en época de Aristóteles esta definición no estaba todavía establecida.

[39] *Hēgoúmenoi te kai hēpómenoi lógoi* «razones antecedentes y consecuentes» resulta oscuro; por ello, Candalla y Peyrard leen *lógon hóroi* o simplemente *lógon*. Además, la definición no se utiliza nunca en los *Elementos*, pues no se alude a los paralelogramos que cumplen estas propiedades (VI 14-15, XI 34, etc.) como «inversamente relacionados» sino «que tienen sus lados inversamente relacionados». Probablemente se trata de una interpolación que ya aparece en Herón. Simson propone sustituir esta definición por la siguiente: «Dos cantidades [magnitudes] proporcionales se dicen recíprocamente proporcionales á otras dos, quando una de las primeras es á una de las segundas, como la restante de las segundas á la restante de las primeras» (ed. cit., pág. 322).

Por otra parte, la traducción «inversamente relacionados» (recíprocamente proporcionales en la versión española de la edición de Simson)

3. Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) mayor es al menor.
4. En toda figura, la altura es la perpendicular trazada desde el vértice hasta la base.

[5. Se dice que una razón está compuesta de razones cuando los tamaños de las razones multiplicadas por sí mismas producen alguna razón][40].

PROPOSICIÓN 1

Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases[41].

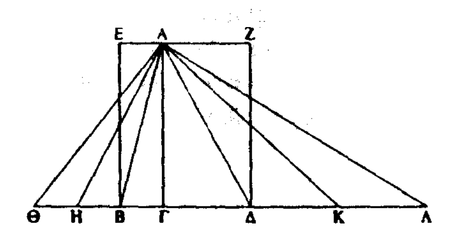
---

tanto en esta definición como en las proposiciones VI 14-15, corresponde al verbo griego *antipáschō*. Prefiero esta versión a la de «inversamente proporcionales» que proponen MÜGLER: «être inversement proportionnel» (*Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs*, pág. 66), F. VERA (*Científicos griegos* I, pág. 805) y el *Diccionario Griego-Español II* (Madrid, C.S.I.C., 1986), pág. 346, porque Euclides no utiliza ni en esta definición ni en las proposiciones VI 14-15, el término habitual para la proporción por inversión: *anápalin*.

[40] No cabe duda de que la presente definición ha sido interpolada por Teón. El ms. P la tiene en el margen, se omite en la traducción del árabe de Campano y los mss. que la tienen la presentan en diferentes lugares. Simson la tacha de inútil, absurda y nada geométrica, pues sólo los números pueden multiplicarse y hay razones de las que no puede resultar número alguno, por ej. la de la diagonal del cuadrado a su lado, o la de la circunferencia del círculo a su diámetro, y otras semejantes. Aduce, por otra parte, que no se hallan vestigios de la definición ni en Euclides, ni en Arquímedes, ni en ningún otro geómetra de los antiguos que usan con frecuencia la razón compuesta. Concluye que la definición presente se debe a Teón, pues aparece en sus comentarios sobre la *Descripción Magna* de Tolemeo (cf. SIMSON, ed. cit., págs. 324-329).

[41] Más literalmente: «que están bajo la misma altura» *tà hypò tò autò hýpsos ónta*.

Sean ΑΒΓ, ΑΓΔ triángulos y ΕΓ, ΓΖ paralelogramos que tienen la misma altura.



Digo que como la base ΒΓ es a la base ΓΔ, así el triángulo ΑΒΓ es al triángulo ΑΓΔ y el paralelogramo ΕΓ al paralelogramo ΓΖ.

Pues prolónguese ΒΔ por cada lado hasta los puntos Θ, Λ, y háganse tantas rectas como se quiera ΒΗ, ΗΘ iguales a la base ΒΓ, y tantas rectas como se quiera ΔΚ, ΚΛ iguales a la base ΓΔ. Y trácense ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ. Ahora bien, puesto que ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ son iguales entre sí, los triángulos ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ son también iguales entre sí [I, 38]. Por tanto, cuantas veces la base ΘΓ es múltiplo de la base ΒΓ, tantas veces el triángulo ΑΘΓ es múltiplo del triángulo ΑΒΓ. Por lo mismo cuantas veces la base ΛΓ es múltiplo de la base ΓΔ, tantas veces el triángulo ΑΛΓ es también múltiplo del triángulo ΑΓΔ; y si la base ΘΓ es igual a la base ΓΛ, el triángulo ΑΘΓ es también igual al triángulo ΑΓΛ [I, 38], y si la base ΘΓ excede a la base ΓΛ, el triángulo ΑΘΓ excede también al triángulo ΑΓΛ, y si es menor, es menor.

Habiendo, pues, cuatro magnitudes: dos bases ΒΓ, ΓΔ y dos triángulos ΑΒΓ, ΑΓΔ, se han tomado unos equimúltiplos de la base ΒΓ y del triángulo ΑΒΓ, a saber: la base ΘΓ y el triángulo ΑΘΓ, y, de la base ΓΔ y del triángulo ΑΔΓ, otros equimúltiplos al azar, a saber: la base ΛΓ y el triángulo ΑΛΓ; ahora bien, se ha demostrado que, si la base ΘΓ excede a la

base ΓΛ, el triángulo ΑΘΓ excede también al triángulo ΑΛΓ, y si es igual, es igual, y si menor, menor. Por tanto, como la base ΒΓ es a la base ΓΔ, así el triángulo ΑΒΓ es al triángulo ΑΓΔ [V, Def. 5].

Y puesto que el paralelogramo ΕΓ es el doble del triángulo ΑΒΓ [I, 41] y el paralelogramo ΖΓ es el doble del triángulo ΑΓΔ, mientras que las partes guardan la misma razón que sus mismos múltiplos [V, 15], entonces, como el triángulo ΑΒΓ es al triángulo ΑΓΔ, así el paralelogramo ΕΓ al paralelogramo ΖΓ. Así pues, ya que se ha demostrado que, como la base ΒΓ es a la base ΓΔ, así el triángulo ΑΒΓ es al triángulo ΑΓΔ, y, como el triángulo ΑΒΓ es al triángulo ΑΓΔ así el paralelogramo ΕΓ es al paralelogramo ΓΖ, entonces, como la base ΒΓ es a la base ΓΔ, así el paralelogramo ΕΓ es al paralelogramo ΖΓ [V, 11].

Por consiguiente los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases. Q. E. D.

Proposición 2

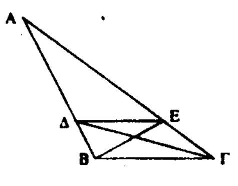
Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo.

Trácese, pues, ΔΕ paralela a uno de los lados, ΒΓ, del triángulo ΑΒΓ.

Digo que como ΒΔ es a ΔΑ, así ΓΕ a ΕΑ.

Pues trácense ΒΕ, ΓΔ.

Entonces el triángulo BΔE es igual al triángulo ΓΔE: porque están sobre la misma base, ΔE, y entre las mismas paralelas, ΔE, BΓ [I, 38]; y el triángulo AΔE es algún otro (triángulo). Pero las (magnitudes) iguales guardan la misma razón con una misma (magnitud) [V, 7]; entonces, como el triángulo BΔE es al (triángulo) AΔE, así el triángulo ΓΔE es al triángulo AΔE. Ahora bien, como el triángulo BΔE es al triángulo AΔE, así BΔ es a ΔA: porque teniendo la misma altura, a saber: la perpendicular trazada desde E hasta AB, son uno a otro como sus bases [VI, 1]. Por la misma razón, como el triángulo ΓΔE es al triángulo AΔE, así ΓE a EA; por tanto, como BΔ es a ΔA, así también ΓE a EA [V, 11].



Por otra parte córtense proporcionalmente los lados AB, AΓ del triángulo ABΓ, de modo que, como BΔ es a ΔA, así ΓE a EA, y trácese ΔE.

Digo que ΔE es paralela a BΓ.

Pues, siguiendo la misma construcción, dado que, como BΔ es a ΔA, así ΓE a EA, mientras que, como BΔ es a ΔA, así el triángulo BΔE es al triángulo AΔE, y, como ΓE es a EA, así el triángulo ΓΔE es al triángulo AΔE [VI, 1], entonces, como el triángulo BΔE es al triángulo AΔE, así el triángulo ΓΔE es al triángulo AΔE [V, 11]. Por tanto cada uno de los triángulos, BΔE, ΓΔE, guarda la misma razón con el (triángulo) AΔE. Así pues el triángulo BΔE es igual al triángulo ΓΔE [V, 9]; y están sobre la misma base, ΔE. Pero los triángulos que están sobre la misma base, están también entre las mismas paralelas [I, 39], por tanto ΔE es paralela a BΓ.

Por consiguiente, si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los la-

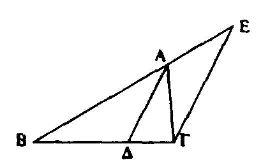
dos de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 3

Si se divide en dos partes iguales un ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta también la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los restantes lados del triángulo; y, si los segmentos de la base guardan la misma razón que los lados restantes del triángulo, la recta trazada desde el vértice hasta la sección dividirá en dos partes iguales el ángulo del triángulo.

Sea ΑΒΓ el triángulo, y divídase el ángulo ΒΑΓ en dos partes iguales por la recta ΑΔ.

Digo que, como ΒΔ es a ΓΔ, así ΒΑ a ΑΓ.



Pues trácese por el (punto) Γ, ΓΕ paralela a ΔΑ y, prolongada ΒΑ, coincida con ella en Ε.

Ahora bien, dado que la recta ΑΓ ha incidido sobre las paralelas ΑΔ, ΕΓ, entonces el ángulo ΑΓΕ es igual al (ángulo) ΓΑΔ [I, 29]. Pero se ha supuesto que el (ángulo) ΓΑΔ es igual al (ángulo) ΒΑΔ; así pues el (ángulo) ΒΑΔ es también igual al ángulo ΑΓΕ. Asimismo, dado que la (recta) ΒΑΕ ha incidido sobre las paralelas ΑΔ, ΕΓ, el ángulo externo ΒΑΔ es igual al interno ΑΕΓ [I, 29]. Pero se ha demostrado que el (ángulo) ΑΓΕ es también igual al (ángulo) ΒΑΔ, por tanto el ángulo ΑΓΕ es también igual al (ángulo) ΑΕΓ; de manera que el lado ΑΕ es también igual al lado ΑΓ [I, 6].

Y puesto que se ha trazado la (recta) ΑΔ paralela a uno de los lados, ΕΓ, del triángulo ΒΓΕ, entonces, proporcionalmente, como ΒΔ es a ΔΓ, así ΒΑ a ΑΕ [VI, 2].

Pero ΑΕ es igual a ΑΓ. Por tanto, como ΒΔ es a ΔΓ, así ΒΑ a ΑΓ.

Ahora bien, sea ΒΑ a ΑΓ como ΒΔ a ΔΓ y trácese ΑΔ.

Digo que el ángulo ΒΑΓ ha sido dividido en dos partes iguales por la recta ΑΔ.

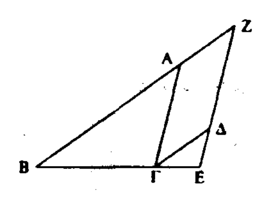
Pues, siguiendo la misma construcción, dado que, como ΒΔ es a ΔΓ así ΒΑ a ΑΓ, pero también como ΒΔ es a ΔΓ, así ΒΑ a ΑΕ —porque se ha trazado ΑΔ paralela a uno de los lados ΕΓ del triángulo ΒΓΕ [VI, 2]—, entonces, como ΒΑ es a ΑΓ, así también ΒΑ a ΑΕ [V, 11]. Por tanto ΑΓ es igual a ΑΕ [V, 9]; de manera que el ángulo ΑΕΓ es también igual al (ángulo) ΑΓΕ [I, 5]. Pero el (ángulo) ΑΕΓ es igual al (ángulo) externo ΒΑΔ [I, 29], y el (ángulo) ΑΓΕ es igual al (ángulo) alterno ΓΑΔ [I, 29]; así pues el (ángulo) ΒΑΔ es también igual al (ángulo) ΓΑΔ. Por tanto el ángulo ΒΑΓ ha sido dividido en dos partes iguales por la recta ΑΔ.

Por consiguiente, si se divide en dos partes iguales un ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta también la base, los segmentos de la base guardan la misma razón que los restantes lados del triángulo. Y si los segmentos de la base guardan la misma razón que los lados restantes del triángulo, la recta trazada desde el vértice hasta la sección dividirá en dos partes iguales el ángulo del triángulo.

Proposición 4

En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes.

Sean ABΓ, ΔΓE triángulos equiángulos con el ángulo ABΓ igual al ángulo ΔΓE, y el ángulo BAΓ igual al ΓΔE y además el (ángulo) AΓB igual al (ángulo) ΓEΔ.



Digo que en los triángulos ABΓ, ΔΓE, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los (lados) que subtienden los ángulos iguales son correspondientes.

Pónganse, pues, en línea recta BΓ, ΓE. Y dado que los ángulos ABΓ, AΓB son menores que dos rectos [I, 17], y el (ángulo) AΓB es igual al (ángulo) ΔEΓ, entonces los (ángulos) ABΓ, ΔEΓ son menores que dos rectos; por tanto BA, EΔ, prolongadas, se encontrarán [I, Post. 5]. Prolónguense y encuéntrense en Z.

Y puesto que el ángulo ΔΓE es igual al (ángulo) ABΓ, BZ es paralela a ΓΔ [I, 28]. Puesto que, a su vez, el (ángulo) AΓB es igual al (ángulo) ΔEΓ, AΓ es paralela a ZE [I, 28]. Por tanto ZAΓΔ es un paralelogramo; luego ZA es igual a ΔΓ y AΓ a ZΔ [I, 34]. Ahora bien, dado que AΓ ha sido trazada paralela a uno (de los lados), ZE, del triángulo ZBE, entonces, como BA es a AZ, así BΓ a ΓE [VI, 2]. Pero AZ es igual a ΓΔ; por tanto, como BA es a ΓΔ, así BΓ a ΓE, y, por alternancia, como AB es a BΓ, así ΔΓ a ΓE [V, 16]. Asimismo, puesto que ΓΔ es paralela a BZ, entonces, como BΓ es a ΓE, así ZΔ a ΔE [VI, 2].

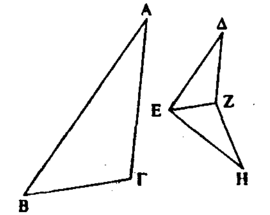
Pero ZΔ es igual a AΓ; por tanto, como BΓ es a ΓE, así AΓ a ΔE, y, por alternancia, como BΓ es a ΓΔ, así ΓE a EΔ [V, 16]. Así pues, ya que se ha demostrado que, como AB es a BΓ, así ΔΓ a ΓE, y como BΓ es a ΓΔ, así ΓE a EΔ, entonces, por igualdad, como BA es a AΓ, así ΓΔ es a ΔE [V, 22].

Por consiguiente, en los triángulos equiángulos los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes. Q. E. D.

Proposición 5

Si dos triángulos tienen los lados proporcionales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.

Sean ABΓ, ΔEZ dos triángulos que tienen los lados proporcionales, es decir que como AB es a BΓ, así ΔE a EZ, y como BΓ es a ΓA, así EZ a ZΔ, y, además, como BA es a AΓ, así EΔ a ΔZ.



Digo que el triángulo ABΓ y el triángulo ΔEZ son equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes, a saber: el (ángulo) ABΓ al (ángulo) ΔEZ, el (ángulo) BΓA al (ángulo) EZΔ y además el (ángulo) BAΓ al (ángulo) EΔZ.

Pues constrúyase en la recta EZ y en sus puntos E, Z, el ángulo ZEH igual al ángulo ABΓ [I, 23]; entonces el (ángulo) restante correspondiente a A es igual al (ángulo) restante correspondiente a H [I, 32].

Por tanto el triángulo ABΓ y el triángulo EHZ son equiángulos. Luego en los triángulos ABΓ, EHZ los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales, y los (lados) que subtienden los ángulos iguales son correspondientes [VI, 4]; entonces como AB es a BΓ, HE es a EZ. Ahora bien, se ha supuesto que como AB es a BΓ, así ΔE es a EZ; por tanto, como ΔE es a EZ, así HZ a EZ [V, 11]. Así pues, cada una de las (rectas) ΔE, HE guarda la misma razón con EZ; por tanto ΔE es igual a HE [V, 9]. Por la misma razón, ΔZ es también igual a HZ. Así pues, dado que ΔE es igual a EH y EZ es común, los dos (lados) ΔE, EZ son iguales a los dos (lados) HE, EZ; y la base ΔZ es igual a la base ZH; entonces el ángulo ΔEZ es igual al ángulo HEZ [I, 8], y el triángulo ΔEZ igual al triángulo HEZ, y los ángulos restantes iguales a los ángulos restantes, aquellos a los que subtienden los lados iguales [I, 4]. Por tanto el ángulo ΔZE es también igual al (ángulo) HZE, y el (ángulo) EΔZ al (ángulo) EHZ. Y, dado que el (ángulo) ZEΔ es igual al (ángulo) HEZ, y el (ángulo) HEZ es igual al (ángulo) ABΓ, entonces el ángulo ABΓ es también igual al (ángulo) ΔEZ. Por la misma razón el (ángulo) AΓB es también igual al (ángulo) ΔZE, y además el (ángulo) correspondiente a A es igual al (ángulo) correspondiente a Δ; por tanto el triángulo ABΓ y el triángulo ΔEZ son equiángulos.

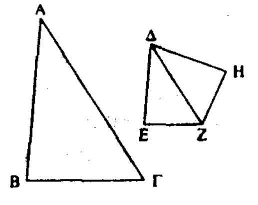
Por consiguiente, si dos triángulos tienen los lados proporcionales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 6

Si dos triángulos tienen un ángulo (del uno) igual a un ángulo (del otro) y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.

Sean ABΓ, ΔEZ dos triángulos que tienen un ángulo, BAΓ, igual a un ángulo, EΔZ, y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, esto es: como BA es a AΓ, así EΔ a ΔZ.

Digo que el triángulo ABΓ y el triángulo ΔEZ son equiángulos y tendrán el ángulo ABΓ igual al ángulo ΔEZ y el (ángulo) AΓB al (ángulo) ΔZE.



Constrúyase, pues, en la recta ΔZ y en sus puntos Δ, Z, el (ángulo) ZΔH igual a uno de los (ángulos) BAΓ, EΔZ, y el (ángulo) ΔZH igual al (ángulo) AΓB [I, 23]; entonces el ángulo restante correspondiente a B es igual al ángulo restante correspondiente a H [I, 32].

Por tanto, el triángulo ABΓ y el triángulo ΔHZ son equiángulos. Luego, proporcionalmente, como BA es a AΓ, así HΔ a ΔZ [VI, 4]. Pero se ha supuesto también que como BA es a AΓ, así EΔ a ΔZ; luego también como EΔ es a ΔZ, así HΔ a ΔZ [V, 11]. Por tanto EΔ es igual a ΔH [V, 9] y ΔZ es común; entonces los dos (lados) EΔ, ΔZ, son iguales a los dos (lados) HΔ, ΔZ; y el ángulo EΔZ es igual al ángulo HΔZ; luego la base

EZ es igual a la base HZ, y el triángulo ΔEZ es igual al triángulo HΔZ, y los ángulos restantes serán iguales a los ángulos restantes, aquellos a los que subtienden los lados iguales [I, 4]. Por tanto el (ángulo) ΔZH es igual al (ángulo) ΔZE, y el (ángulo) ΔHZ al (ángulo) ΔEZ. Pero el (ángulo) ΔZH es igual al (ángulo) AΓB; luego el (ángulo) AΓB es igual al (ángulo) ΔZE. Ahora bien, se ha supuesto que también el (ángulo) BAΓ es igual al (ángulo) EΔZ; por tanto, el (ángulo) restante correspondiente a B es igual al (ángulo) restante correspondiente a E [I, 32]; luego el triángulo ABΓ y el triángulo ΔEZ son equiángulos.

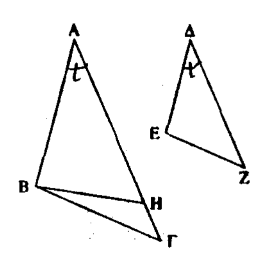
Por consiguiente, si dos triángulos tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro) y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes. Q. E. D.

Proposición 7

Si dos triángulos tienen un ángulo de uno igual a un ángulo de otro y tienen proporcionales los lados que comprenden los otros ángulos, y tienen los restantes ángulos parejamente menores o no menores que un recto, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos que comprenden los lados proporcionales.

Sean ABΓ, ΔEZ dos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro): el BAΓ al EΔZ, y los lados que comprenden los otros ángulos ABΓ, ΔEZ, proporcionales, a saber: como AB es a BΓ, así ΔE a EZ; y tengan, en primer lugar, los restantes (ángulos) correspondientes a Γ, Z menores que un recto.

Digo que el triángulo ABΓ y el triángulo ΔEZ son equiángulos y el ángulo ABΓ será igual al (ángulo) ΔEZ, y el ángulo restante, es decir, el correspondiente a Γ, igual al (ángulo) restante correspondiente a Z.

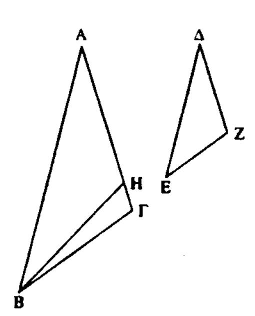


Pues si el (ángulo) ABΓ no es igual al ángulo ΔEZ, uno de ellos es mayor. Sea mayor el ángulo ABΓ. Y constrúyase en la recta AB y en su punto B el ángulo ABH igual al (ángulo) ΔEZ [I, 23].

Y dado que el ángulo A es igual al Δ y el (ángulo) ABH al (ángulo) ΔEZ, entonces el (ángulo) restante AHB es igual al (ángulo) restante ΔZE [I, 32]. Luego el triángulo ABH y el triángulo ΔEZ son equiángulos. Por tanto, como AB es a BH, así ΔE a EZ. Pero se ha supuesto que, como ΔE es a EZ, AB es a BΓ; entonces AB guarda la misma razón con cada una de las (rectas) BΓ, BH [V, 11]; por tanto BΓ es igual a BH [V, 9]. De modo que también el ángulo correspondiente a Γ es igual al (ángulo) BHΓ [I, 5]. Ahora bien, el (ángulo) correspondiente a Γ se ha supuesto menor que un recto; por tanto el (ángulo) BHΓ es también menor que un recto; de modo que el adyacente a él, AHB, es mayor que un recto [I, 13]. Pero se ha demostrado que es igual al correspondiente a Z; entonces el correspondiente a Z es también mayor que un recto; pero se ha supuesto menor que un recto, lo cual es absurdo. Por tanto no es el caso de que el ángulo ABΓ no sea igual al (ángulo) ΔEZ; luego es igual. Y el (ángulo) correspondiente a A es igual al ángulo correspondiente a Δ; así pues, el (ángulo) restante correspondiente a Γ es igual al (ángulo) restante correspondiente a Z [I, 32]. Por tanto el triángulo ABΓ y el triángulo ΔEZ son equiángulos.

Pero supóngase a su vez que cada uno de los ángulos correspondientes a Γ, Z no son menores que un recto.

Digo ahora que también en este caso el triángulo ABΓ y el triángulo ΔEZ son equiángulos.



Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de manera semejante que BΓ es igual a BH; de modo que el ángulo correspondiente a Γ es también igual al (ángulo) BHΓ [I, 5]. Pero el (ángulo) correspondiente a Γ no es menor que un recto. Entonces el (ángulo) BHΓ tampoco es menor que un recto. Así que los dos ángulos del triángulo BHΓ no son menores que dos rectos, lo cual es imposible [I, 17]. Por tanto, una vez más no es el caso de que el (ángulo) ABΓ no sea igual al (ángulo) ΔEZ; luego es igual. Pero el (ángulo) correspondiente a A es igual al (ángulo) correspondiente a Δ; así pues, el (ángulo) restante correspondiente a Γ es igual al (ángulo) restante correspondiente a Z [I, 32]. Luego el triángulo ABΓ y el triángulo ΔEZ son equiángulos.

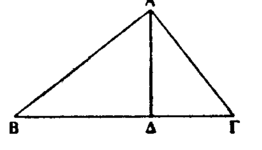
Por consiguiente, si dos triángulos tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (de otro) y tienen proporcionales los lados que comprenden los otros ángulos y tienen los restantes ángulos parejamente menores o no menores que un recto, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos que comprenden los lados proporcionales. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 8

Si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al (triángulo) entero y entre sí.

Sea ABΓ el triángulo rectángulo que tiene el ángulo recto BAΓ, y trácese desde A hasta BΓ la perpendicular AΔ.

Digo que cada uno de los triángulos ABΔ, AΔΓ es semejante al (triángulo) entero ABΓ y también (son semejantes) entre sí.



Pues como el (ángulo) BAΓ es igual al (ángulo) AΔB: porque cada uno de ellos es recto; y el (ángulo) correspondiente a B es común a los dos triángulos ABΓ, ABΔ, entonces, el (ángulo) restante AΓB es igual al (ángulo) restante BAΔ [I, 32]; por tanto, el triángulo ABΓ y el triángulo ABΔ son equiángulos. Luego, como el (lado) BΓ que subtiende el (ángulo) recto del triángulo ABΓ es al (lado) BA que subtiende el (ángulo) recto del triángulo ABΔ, así el propio (lado) AB que subtiende el ángulo correspondiente a Γ del triángulo ABΓ es al (lado) BΔ que subtiende el (ángulo) igual BAΔ del triángulo ABΔ, y también el (lado) AΓ al (lado) AΔ que subtiende el ángulo correspondiente a B común a los dos triángulos [VI, 4]. Por tanto el triángulo ABΓ y el triángulo ABΔ son equiángulos y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales. Entonces el triángulo ABΓ es semejante al triángulo ABΔ [VI, Def. 1].

De manera semejante demostraríamos que también el triángulo ABΓ es semejante al triángulo AΔΓ; por tanto cada uno de los (triángulos) ABΔ, AΔΓ son semejantes al (triángulo) entero ABΓ.

Digo ahora que los triángulos ABΔ, AΔΓ son también semejantes entre sí.

Pues como el (ángulo) recto BΔA es igual al (ángulo) recto AΔΓ y además se ha demostrado que también el (ángulo) BAΔ es igual al correspondiente a Γ, entonces el (ángulo) restante correspondiente a B es igual al (ángulo) restante ΔAΓ [I, 32]; por tanto el triángulo ABΔ y el triángulo AΔΓ son equiángulos. Luego, como el (lado) BΔ que subtiende al (ángulo) BAΔ del triángulo ABΔ es al (lado) ΔA que subtiende al (ángulo) correspondiente a Γ del triángulo AΔΓ, igual al (ángulo) BAΔ, así el propio (lado) AΔ que subtiende el ángulo correspondiente a B del triángulo ABΔ es al (lado) ΔΓ que subtiende el (ángulo) ΔAΓ del triángulo AΔΓ, igual al ángulo correspondiente a B, y también el (lado) BA al (lado) AΓ, los cuales subtienden los (ángulos) rectos [VI, 4]. Entonces el triángulo ABΔ es semejante al triángulo AΔΓ [VI, Def. 1].

Por consiguiente, si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al (triángulo) entero y entre sí.

Porisma:

A partir de esto queda claro que si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, la recta trazada es la media proporcional de los segmentos de la base. Q. E. D.[42].

---

[42] En el texto griego aparecen algunas líneas tras la cláusula del porisma (*hóper édei deixai*) «y además el lado adyacente al segmento es una

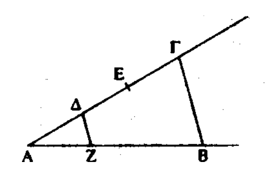
PROPOSICIÓN 9

Quitar de una recta dada la parte que se pida.

Sea AB la recta dada.

Así pues, hay que quitar de AB la parte que se pida.

Pues pídase la tercera parte. Trácese una recta AΓ a partir de A que comprenda junto con AB un ángulo cualquiera[43]; y tómese un punto al azar Δ en la (recta) AΓ, y háganse ΔE, EΓ iguales a AΔ [I, 3]. Y trácese BΓ; y, por el (punto) Δ, trácese ΔZ paralela a ella [I, 31].



Puesto que se ha trazado ZΔ paralela a uno de los lados, BΓ, del triángulo ABΓ, entonces, proporcionalmente, como ΓΔ es a ΔA, así BZ a ZA [VI, 2]. Pero ΓΔ es el doble de ΔA; por tanto BZ es también el doble de ZA; luego BA es el triple de AZ.

Por consiguiente, se ha quitado de la recta dada AB la tercera parte que se pedía. Q. E. F.

---

media proporcional entre la base y uno cualquiera de los segmentos». Heiberg considera estas palabras interpoladas porque, además de encontrarse detrás de la cláusula, faltan en algunos de los mejores mss., si bien P y Campano cuentan con ellas omitiendo la cláusula. Su punto de vista parece confirmado por el hecho de que, mientras que la primera parte del porisma se cita en varias ocasiones (VI 13, lema anterior a X 33, lema posterior a XIII 3), la segunda aparecerá con una prueba independiente en otros lugares.

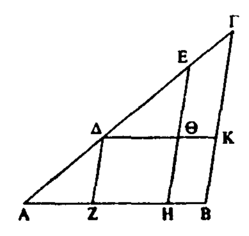
[43] La expresión que aparece aquí y en las dos proposiciones siguientes es *tychoûsa gōnía* semejante a *tychòn sēmeîon* que he traducido como «un punto al azar». Pero aquí no se trata de «tomar» un ángulo sino de trazar una recta de manera que forme un ángulo «cualquiera» con otra recta.

Proposición 10

Dividir una recta dada no dividida de manera semejante a una recta dada ya dividida.

Sea AB la recta dada no dividida y AΓ la dividida en los puntos Δ, E, y colóquense de modo que comprendan un ángulo cualquiera y trácese ΓB, y, por los (puntos) Δ, E, trácense ΔZ, EH paralelas a BΓ, y, por el (punto) Δ, trácese ΔΘK paralela a AB [I, 31].

Entonces, cada una de las (figuras) ZΘ, ΘB es un paralelogramo; por tanto ΔΘ es igual a ZH y ΘK a HB [I, 34]. Ahora bien, como se ha trazado la recta ΘE paralela a uno de los lados, KΓ, del triángulo ΔKΓ, entonces, proporcionalmente, como ΓE es a EΔ, así KΘ a ΘΔ [VI, 2]. Pero KΘ es igual a BH y ΘΔ a HZ. Luego como ΓE es a EΔ, así BH a HZ. Como a su vez se ha trazado la (recta) ZΔ paralela a uno de los lados HE del triángulo AHE, entonces, proporcionalmente, como EΔ es a ΔA, así HZ a ZA [VI, 2]. Pero se ha demostrado que también como ΓE es a EΔ, así BH a HZ. Por tanto, como ΓE es a EΔ, así BH a HZ, y como EΔ es a ΔA, así HZ a ZA.



Por consiguiente, se ha dividido la recta dada no dividida AB de manera semejante a la recta dada ya dividida AΓ. Q. E. F.

PROPOSICIÓN 11

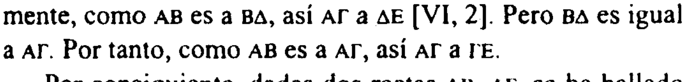
Dadas dos rectas, hallar una tercera proporcional[44].

Sean BA, AΓ las (rectas) dadas y pónganse comprendiendo un ángulo cualquiera.

Así pues hay que hallar una tercera (recta) proporcional a BA, AΓ.

Prolónguense, pues, hasta los puntos Δ, E, y hágase BΔ igual a AΓ [I, 3], trácese BΓ, y, por el punto Δ, trácese ΔE paralela a ella [I, 31].

Entonces, dado que ha sido trazada BΓ paralela a uno de los lados, ΔE, del triángulo AΔE, proporcionalmente, como AB es a BΔ, así AΓ a ΔE [VI, 2]. Pero BΔ es igual a AΓ. Por tanto, como AB es a AΓ, así AΓ a ΓE.



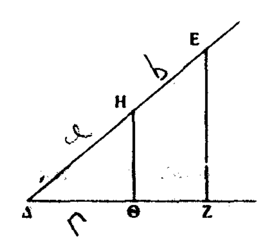
Por consiguiente, dadas dos rectas AB, AΓ, se ha hallado una tercera ΓE proporcional a ellas. Q. E. F.

[44] La traducción de *proseuriskein* por «hallar» no refleja exactamente lo que quiere decir en griego, pues *proseuriskein* no es sinónimo de *heurískein*, sino que se refiere a una operación que consiste en completar una secuencia de segmentos de recta mediante la construcción de un nuevo segmento que tenga una relación determinada con los segmentos dados. En este mismo sentido se aplica a series de números en los libros de aritmética (cf. IX 18 y 19).

Proposición 12

Dadas tres rectas, hallar una cuarta proporcional[45].

Sean A, B, Γ las tres rectas dadas.



Así pues hay que hallar una cuarta proporcional a A, B, Γ.

Dispónganse[46] las dos rectas ΔE, ΔZ comprendiendo el ángulo EΔZ; hágase ΔH igual a A, HE igual a B, y además ΔΘ igual a Γ; y, una vez trazada HΘ, trácese por el (punto) E la (recta) EZ paralela a ella [I, 31].

Así pues, dado que HΘ ha sido trazada paralela a uno de los lados, EZ, del triángulo ΔEZ, entonces, como ΔH es a HE, así ΔΘ a ΘZ [VI, 2]. Pero ΔH es igual a A, HE a B y ΔΘ a Γ; por tanto, como A es a B, así Γ es a ΘZ.

Por consiguiente, dadas tres rectas, A, B, Γ, se ha hallado una cuarta proporcional ΘZ. Q. E. F.

Proposición 13

Dadas dos rectas, hallar una media proporcional.

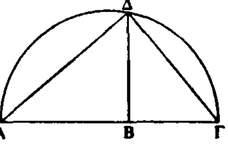
Sean AB, BΓ las dos rectas dadas.

---

[45] Se trata de un caso particular de la proposición 12. Para el significado de *proseureîn*, cf. nota 44.

[46] Euclides utiliza aquí *ekkeísthōsan* «dispónganse», en lugar del simple *keísthōsan* «pónganse», mucho más frecuente.

Así pues hay que hallar una media proporcional a las (rectas) AB, BΓ.



Pónganse en línea recta, y descríbase sobre AΓ el semicírculo AΔΓ y trácese a partir del punto B la (recta) BΔ formando ángulos rectos con la recta AΓ, y trácense AΔ, ΔΓ.

Puesto que el (ángulo) AΔΓ es un ángulo en un semicírculo, es recto [III, 31]. Y, dado que en el triángulo rectángulo AΔΓ se ha trazado la perpendicular ΔB desde el ángulo recto hasta la base, entonces ΔB es una media proporcional entre los segmentos de la base, AB, BΓ [VI, 8, porisma].

Por consiguiente, dadas dos rectas, AB, BΓ, se ha hallado una media proporcional, ΔB. Q. E. F.[47].

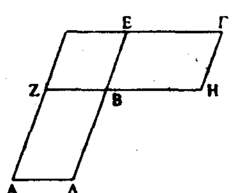
Proposición 14

En los paralelogramos iguales y equiángulos entre sí, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, y aquellos paralelogramos equiángulos que tienen los lados que comprenden los ángulos iguales inversamente relacionados, son iguales.

Sean AB, BΓ paralelogramos iguales y equiángulos que tienen iguales los ángulos correspondientes a B, y pónganse en línea recta los (lados) ΔB, BE; entonces ZB, BH también están en línea recta [I, 14].

[47] Esta proposición del libro VI, versión de la II, 14, es equivalente a la extracción de la raíz cuadrada y, además, nos permite, dada una razón entre líneas rectas, hallar la razón que es su «subduplicada», o, dicho de otro modo, la razón de la que ella es la duplicada.

Digo que en los (paralelogramos) AB, BΓ, los lados que



comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, es decir que como ΔB es a BE, así HB a BZ.

Pues complétese el paralelogramo ZE. Así pues, dado que el paralelogramo AB es igual al paralelogramo BΓ, mientras que ZE es otro (paralelogramo), entonces como el (paralelogramo) AB es al (paralelogramo) ZE, así el paralelogramo BΓ al (paralelogramo) ZE [V, 7]. Pero como el (paralelogramo) AB es al (paralelogramo) ZE, así el (lado) ΔB al (lado) BE [VI, 1], y como el paralelogramo BΓ es al (paralelogramo) ZE, así el (lado) HB al (lado) BZ [VI, 1]; entonces, como ΔB es a BE, así HB a BZ [V, 11]. Por tanto, en los paralelogramos AB, BΓ, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados.

Ahora bien, sea HB a BZ como ΔB es a BE.

Digo que el paralelogramo AB es igual al paralelogramo BΓ.

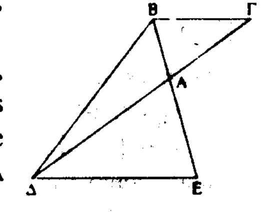
Pues dado que, como ΔB es a BE, así HB a BZ, mientras que, como ΔB es a BE, así el paralelogramo AB al paralelogramo ZE [VI, 1], y como HB es a BZ, así el paralelogramo BΓ al paralelogramo ZE [VI, 1], entonces, como AB es a ZE, así BΓ a ZE [V, 11]; por tanto el paralelogramo AB es igual al paralelogramo BΓ [V, 9].

Por consiguiente, en los paralelogramos iguales y equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, y aquellos que tienen los lados que comprenden los ángulos iguales inversamente relacionados, son iguales. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 15

En los triángulos iguales que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro), los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados. Y aquellos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro) cuyos lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, son iguales.

Sean ABΓ, AΔE triángulos iguales que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro), a saber: el ángulo BAΓ al ángulo ΔAE.



Digo que en los triángulos ABΓ, AΔE, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, es decir, que como ΓA es a AΔ, así EA a AB.

Pues hágase de modo que ΓA esté en línea recta con AΔ; entonces EA está también en línea recta con AB [I, 14]. Y trácese BΔ.

Así pues, dado que el triángulo ABΓ es igual al triángulo AΔE y BAΔ es otro (triángulo), entonces, como el triángulo ΓAB es al triángulo BAΔ, así el triángulo EAΔ es al triángulo BAΔ [V, 7].

Pero como el (triángulo) ΓAB es al (triángulo) BAΔ, así la (base) ΓA es a la (base) AΔ [VI, 1], y, como el (triángulo) EAΔ es al (triángulo) BAΔ, así la (base) EA a la (base) AB. Entonces, como ΓA es a AΔ, así EA a AB. Por tanto en los triángulos ABΓ, AΔE, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados.

Pero, ahora, estén inversamente relacionados los lados de los triángulos ABΓ, AΔE y sea EA a AB como ΓA a AΔ.

Digo que el triángulo ABΓ es igual al triángulo AΔE.

Pues, trazada de nuevo BΔ, dado que, como ΓA es a AΔ, así EA a AB, mientras que, como ΓA es a AΔ, así el triángulo ABΓ al triángulo BAΔ, y, como EA es a AB, así el triángulo EAΔ al triángulo BAΔ [VI, 1], entonces, como el triángulo ABΓ es al triángulo BAΔ, así el triángulo EAΔ al triángulo BAΔ [V, 11]. Así pues, cada uno de los (triángulos) ABΓ, EAΔ guardan la misma razón con el (triángulo) BAΔ. Por tanto el (triángulo) ABΓ es igual al (triángulo) EAΔ [V, 9].

Por consiguiente, en los triángulos iguales que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro), los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados; y aquellos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro), cuyos lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, son iguales. Q. E. D.

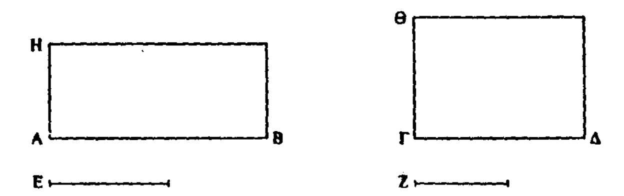
Proposición 16

Si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias, las cuatro rectas serán proporcionales.

Sean AB, ΓΔ, E, Z cuatro rectas proporcionales, a saber: como AB es a ΓΔ, así E a Z.

Digo que el rectángulo comprendido por AB, Z es igual al rectángulo comprendido por ΓΔ, E.

Trácense a partir de los puntos A, Γ, las (rectas) AH, ΓΘ que formen ángulos rectos con las rectas AB, ΓΔ, y hágase



AH igual a Z, y ΓΘ igual a E. Y complétense los paralelogramos BH, ΔΘ.

Pues bien, dado que, como AB es a ΓΔ, así E a Z, mientras que E es igual a ΓΘ y Z a AH, entonces, como AB es a ΓΔ, así ΓΘ a AH. Por tanto, en los paralelogramos BH, ΔΘ, los lados que comprenden los ángulos iguales son inversamente proporcionales; y aquellos paralelogramos equiángulos, que tienen los lados que comprenden los ángulos iguales inversamente proporcionales, son iguales [VI, 14]; luego el paralelogramo BH es igual al paralelogramo ΔΘ. Y BH es el (rectángulo comprendido) por AB, Z: porque AH es igual a Z. Pero ΔΘ es el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, E: porque E es igual a ΓΘ; entonces, el rectángulo comprendido por AB, Z es igual al rectángulo comprendido por ΓΔ, E.

Pero, ahora, sea igual el rectángulo comprendido por AB, Z al rectángulo comprendido por ΓΔ, E.

Digo que las cuatro rectas serán proporcionales, a saber: como AB es a ΓΔ, así E a Z.

Pues, siguiendo la misma construcción, dado que el (rectángulo comprendido) por AB, Z es igual al (rectángulo comprendido) por ΓΔ, E, y el (rectángulo comprendido) por AB, Z es el (rectángulo) BH: porque AH es igual a Z; mientras que el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, E es el (rectángulo) ΔΘ: porque ΓΘ es igual a E; entonces BH es igual a ΔΘ. Y son

equiángulos. Pero en los paralelogramos iguales y equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados [VI, 14]. Así pues, como AB es a ΓΔ, así ΓΘ a AH. Pero ΓΘ es igual a E y AH a Z; por tanto, como AB es a ΓΔ, así E a Z.

Por consiguiente, si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias, las cuatro rectas serán proporcionales. Q. E. D.[48].

Proposición 17

Si tres rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al cuadrado de la media; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al cuadrado de la media, las tres rectas serán proporcionales.

---

[48] Esta proposición es un caso particular de VI 14, pero merece consideración aparte. Se podría enunciar también de la siguiente forma: «Los rectángulos que tienen sus bases inversamente relacionadas con sus alturas, tienen la misma área; y los rectángulos iguales tienen sus bases inversamente relacionadas con sus alturas». Ahora bien, como cualquier paralelogramo es igual al rectángulo que tiene la misma base y la misma altura, y cualquier triángulo es igual a la mitad del paralelogramo que tiene la misma base y la misma altura, se sigue que: «Los paralelogramos o triángulos iguales tienen sus bases inversamente relacionadas con sus alturas y viceversa».

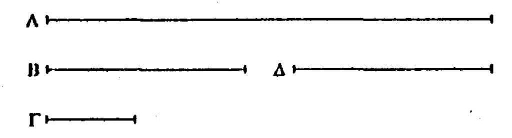
Éste sería el lugar idóneo para incluir las proposiciones que Simson añade al libro VI como proposiciones B, C y D, que se prueban directamente siguiendo los procedimientos de VI, 16 (cf. Simson, ed. cit., págs. 188-189).

Sean A, B, Γ tres rectas proporcionales, a saber: como A es a B, así B a Γ.

Digo que el rectángulo comprendido por A, Γ es igual al cuadrado de B.

Hágase Δ igual a B.

Y dado que A es a B como B es a Γ, y B es igual a Δ, entonces, como A es a B, así Δ es a Γ. Pero, si cuatro rectas son



proporcionales, el (rectángulo comprendido) por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias [VI, 16]. Entonces, el (rectángulo comprendido) por A, Γ es igual al (rectángulo comprendido) por B, Δ. Pero el (rectángulo comprendido) por B, Δ es el cuadrado de B: porque B es igual a Δ; por tanto el (rectángulo comprendido) por A, Γ es igual al (cuadrado) de B.

Pero ahora el (rectángulo comprendido) por A, Γ sea igual al (cuadrado) de B.

Digo que como A es a B, así B a Γ.

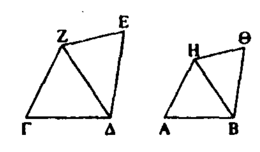
Pues, siguiendo la misma construcción, dado que el (rectángulo comprendido) por A, Γ es igual al (cuadrado) de B, mientras que el cuadrado de B es el (rectángulo comprendido) por B, Δ: porque B es igual a Δ; entonces el (rectángulo comprendido) por A, Γ es igual al (rectángulo comprendido) por B, Δ. Pero si el (rectángulo comprendido) por las extremas es igual al (rectángulo comprendido) por las medias, las cuatro rectas son proporcionales [VI, 16]. Entonces, como A es a B, así Δ a Γ. Pero B es igual a Δ; luego, como A es a B así B a Γ.

Por consiguiente, si tres rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al cuadrado de la media; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al cuadrado de la media, las tres rectas serán proporcionales. Q. E. D.

Proposición 18

A partir de una recta dada, construir una figura rectilínea semejante y situada de manera semejante a una figura rectilínea dada.

Sea AB la recta dada y ΓE la figura rectilínea dada.



Así pues, hay que construir, sobre la recta AB, una figura rectilínea semejante y situada de manera semejante a la figura rectilínea ΓE.

Trácese ΔZ, y constrúyase sobre la recta AB y en sus puntos A, B el ángulo HAB igual al ángulo correspondiente a Γ, y el (ángulo) ABH igual al (ángulo) ΓΔZ [I, 23]. Entonces el (ángulo) restante ΓZΔ es igual al (ángulo) AHB [I, 32]; así pues el triángulo ZΓΔ y el triángulo HAB son equiángulos. Entonces, proporcionalmente, como ZΔ es a HB, así ZΓ a HA, y ΓΔ a AB [VI, 4].

Constrúyase a su vez, sobre la recta BH y en sus puntos B, H, el (ángulo) BHΘ igual al (ángulo) ΔZE, y el (ángulo) HBΘ igual al (ángulo) ZΔE [I, 23]. Entonces el (ángulo) restante correspondiente a E es igual al (ángulo) restante correspondiente a Θ [I, 32]; por tanto el triángulo ZΔE y el triángulo HΘB son equiángulos. Así pues, proporcional-

mente, como ZΔ es a HB, así ZE a HΘ y EΔ a ΘB [VI, 4]. Pero se ha demostrado que también, como ZΔ es a HB, así ZΓ a HA y ΓΔ a AB; por tanto, asimismo, como ZΓ es a AH, así ΓΔ a AB y ZE a HΘ y también EΔ a ΘB. Y, dado que el (ángulo) ΓZΔ es igual al (ángulo) AHB, y el (ángulo) ΔZE al (ángulo) BHΘ, entonces, el ángulo entero ΓZE es igual al (ángulo) entero AHΘ. Por lo mismo, el ángulo ΓΔE es también igual al (ángulo) ABΘ. Pero el (ángulo) correspondiente a Γ es también igual al (ángulo) correspondiente a A, y el (ángulo) correspondiente a E, al correspondiente a Θ. Entonces la figura AΘ es de ángulos iguales a (los de) la (figura) ΓE; y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales; por tanto, la figura rectilínea AΘ es semejante a la figura rectilínea ΓE [VI, Def. 1].

Por consiguiente, a partir de la recta AB, se ha construido la figura rectilínea AΘ, semejante y situada de manera semejante a la figura rectilínea dada ΓE. Q. E. F.[49].

Proposición 19

Los triángulos semejantes guardan entre sí la razón duplicada de sus lados correspondientes.

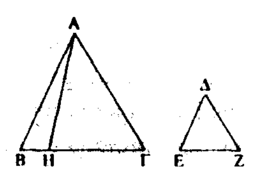
---

[49] Simson pone las siguientes objeciones a esta demostración:

a. Sólo se demuestra en el caso de los cuadriláteros, sin decir de qué forma se puede extender a las figuras rectilíneas de cinco o más lados.

b. En los triángulos equiláteros entre sí, se infiere que el lado del uno es al lado correspondiente del otro como el otro lado del primero a su lado correspondiente del segundo, sin permutar las proporciones, contra la costumbre de Euclides (cf. Simson, ed. cit., pág. 324). Heath no concede importancia a las objeciones de Simson (cf. Heath, ed. cit., pág. 231).

Sean ABΓ, ΔEZ triángulos semejantes que tienen el ángulo correspondiente a B igual al correspondiente a E, tales que[50], como AB es a BΓ, así ΔE es a EZ, de modo que BΓ corresponda a EZ [V, Def. 11].



Digo que el triángulo ABΓ guarda con el triángulo ΔEZ una razón duplicada de la que (guarda) BΓ con EZ.

Tómese, pues, la tercera proporcional, BH, a las (rectas) BΓ, EZ, de modo que, como BΓ es a EZ, así EZ a BH [VI, 11]; y trácese AH.

Así pues, dado que, como AB es a BΓ, así ΔE a EZ, entonces, por alternancia, como AB es a ΔE, así BΓ a EZ [V, 16]. Pero, como BΓ es a EZ, así EZ a BH. Por tanto, también, como AB es a ΔE, así EZ a BH [V, 11]; luego en los triángulos ABH, ΔEZ, los lados que comprenden los ángulos iguales son inversamente proporcionales. Y aquellos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro), cuyos lados que comprenden los ángulos iguales son inversamente proporcionales, son iguales [VI, 15]. Por tanto el triángulo ABH es igual al triángulo ΔEZ. Ahora bien, dado que como BΓ es a EZ, así EZ a BH, y, si tres rectas son proporcionales, la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que (guarda) con la segunda [V, Def. 9], entonces BΓ guarda con BH una razón duplicada (de la) que (guarda) ΓB con EZ. Pero como ΓB es a BH, así el triángulo ABΓ al triángulo ABH [VI, 1]. Entonces el triángulo ABΓ guarda con el triángulo ABH una razón duplicada (de la) que BΓ (guarda) con EZ. Pero el triángulo ABH es igual al triángulo ΔEZ; entonces el trián-

[50] Literalmente: «que tiene el ángulo correspondiente a B igual al correspondiente a E y como AB es a BΓ, así ΔE a EZ».

Sobre el sentido de «duplicada» cf. nota 9.

gulo ABΓ guarda con el triángulo ΔEZ una razón duplicada de la que BΓ (guarda) con EZ.

Por consiguiente, los triángulos semejantes guardan entre sí una razón duplicada (de la que guardan) los lados correspondientes.

Porisma:

A partir de esto queda claro, que, si tres rectas son proporcionales, entonces, como la primera es a la tercera, así la figura construida sobre la primera es a la figura construida de manera semejante sobre la segunda[51].

Proposición 20

Los polígonos semejantes se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos[52] a los (polígonos)

---

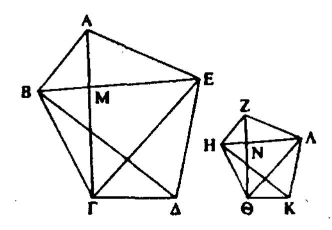
[51] En el porisma Euclides habla de la «figura» *eîdos* construida sobre la primera recta y de la construida de manera semejante sobre la segunda. Si con la palabra «figura» se refiere a un triángulo, que es lo que aparece en la proposición, no habría ninguna dificultad, pero si se refiere a cualquier figura rectilínea, el porisma no se establece realmente hasta la siguiente proposición (VI, 20) y aquí estaría fuera de lugar. La corrección de *eîdos* por *trígōnon* «triángulo» se debe a Teón. En Campano y el ms. P aparece *eîdos*. Heiberg concluye que debe leerse *eîdos* y que Teón, viendo la dificultad que ello representaba llevó a cabo la corrección arriba mencionada y añadió el porisma 2 a VI, 20, para aclarar el asunto. Para más detalles cf. HEATH, ed. cit., págs. 234-235.

Entre el porisma y la cláusula, Heiberg atetiza unas líneas: «puesto que se ha demostrado que, como ΓB es a BH, así el triángulo ABΓ al triángulo ABH, es decir al triángulo ΔEZ». Euclides no suele utilizar este tipo de aclaraciones en los porismas.

[52] La expresión utilizada por Euclides es *homóloga toîs hólois*. Euclides utiliza *homólogos* para referirse a los términos correspondientes de una proporción (V, Def. 11). A partir de Arquímedes designa cualquier elemento geométrico que ocupe el mismo lugar en dos figuras entre las

enteros y un polígono guarda con el otro una razón duplicada de la que guarda el lado correspondiente con el lado correspondiente.

Sean ABΓΔE, ZHΘKΛ polígonos semejantes, y sea AB correspondiente a ZH.



Digo que los polígonos ABΓΔE, ZHΘKΛ se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los (polígonos) enteros; y el polígono ABΓΔE guarda con el polígono ZHΘKΛ una razón duplicada de (la que guarda) AB con ZH.

Trácense BE, EΓ, HΛ, ΛΘ.

Y puesto que el polígono ABΓΔE es semejante al polígono ZHΘKΛ, el (ángulo) BAE es igual al (ángulo) HZΛ. Y, como BA es a AE, así HZ a ZΛ [VI, Def. 1]. Así pues, dado que ABE, ZHΛ son dos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro), y los lados que comprenden los ángulos iguales, proporcionales, entonces el triángulo ABE y el triángulo ZHΛ son equiángulos [VI, 6]; de modo que también son semejantes [VI, 4 y Def. 1]. Por tanto el ángulo ABE es igual al (ángulo) ZHΛ. Pero el (án-

---

que se establece una comparación. En esta proposición se vislumbra la transición entre el sentido estricto y el más amplio de la palabra. De hecho Euclides se siente obligado a explicar a qué se refiere: «es decir que los triángulos...». He traducido por «homólogos» para distinguirlo de otros casos en los que se refiere a rectas o magnitudes.

gulo) entero ABΓ es también igual al (ángulo) entero ZHΘ por la semejanza de los polígonos; luego el ángulo restante EBΓ es igual al (ángulo) ΛHΘ. Ahora bien, puesto que, por la semejanza de los triángulos ABE, ZHΛ, como EB es a BA, así ΛH a HZ, mientras que también por la semejanza de los polígonos, como AB es a BΓ, así ZH a HΘ, entonces, por igualdad, como EB es a BΓ, así ΛH a HΘ [V, 22], y los lados que comprenden los ángulos iguales EBΓ, ΛHΘ son proporcionales; por tanto, el triángulo EBΓ y el triángulo ΛHΘ son equiángulos [VI, 6]; de modo que el triángulo EBΓ es semejante al triángulo ΛHΘ [VI, 4 y Def. 1]. Por lo mismo el triángulo EΓΔ es semejante al triángulo ΛΘK. Entonces los polígonos semejantes ABΓΔE, ZHΘKΛ se han dividido en triángulos semejantes e iguales en número.

Digo que también son homólogos a los polígonos enteros, es decir, de tal manera que los triángulos son proporcionales, y los antecedentes son ABE, EBΓ, EΓΔ, y sus consecuentes ZHΛ, ΛHΘ, ΛΘK y (digo) que el polígono ABΓΔE guarda con el polígono ZHΘKΛ una razón duplicada (de la que guarda) el lado correspondiente con el lado correspondiente, es decir, AB con ZH.

Trácense, pues, AΓ, ZΘ. Y puesto que, por la semejanza de los polígonos el ángulo ABΓ es igual al (ángulo) ZHΘ, y, como AB es a BΓ, así ZH a HΘ, el triángulo ABΓ y el triángulo ZHΘ son equiángulos [VI, 6]; entonces el ángulo BAΓ es igual al (ángulo) HZΘ, y el (ángulo) BΓA al (ángulo) HΘZ. Y puesto que el ángulo BAM es igual al (ángulo) HZN, y el (ángulo) ABM es igual al (ángulo) ZHN, entonces el (ángulo) restante AMB es igual al (ángulo) restante ZNH [I, 32]. Por tanto el triángulo ABM y el triángulo ZHN son equiángulos. De manera semejante demostraríamos que el triángulo BMΓ y el triángulo HNΘ son equiángulos. Entonces, proporcionalmente, como AM es a MB, así ZN a NH, mientras que como

BM es a MΓ, así HN a NΘ; de modo que también, por igualdad, como AM es a MΓ, así ZN a NΘ. Pero, como AM es a MΓ, así el (triángulo) ABM al (triángulo) MBΓ, y el (triángulo) AME al (triángulo) EMΓ: porque son entre sí como sus bases [VI, 1]. Entonces, también, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes a todos los consecuentes [V, 12]; por tanto, como el triángulo AMB es al (triángulo) BMΓ, así el (triángulo) ABE al (triángulo) ΓBE. Ahora bien, como el (triángulo) AMB es al (triángulo) BMΓ, así AM a MΓ; luego también, como AM es a MΓ, así el triángulo ABE al (triángulo) EBΓ. Por lo mismo, además, como ZN es a NΘ, así el triángulo ZHΛ al triángulo HΛΘ. Ahora bien, como AM es a MΓ, así ZN a NΘ; entonces, también, como el triángulo ABE es al triángulo BEΓ, así el triángulo ZHΛ al triángulo HΛΘ, y, por alternancia, como el triángulo ABE es al triángulo ZHΛ, así el triángulo BEΓ es al (triángulo) HΛΘ. De manera semejante demostraríamos, una vez trazadas BΔ, HK, que también, como el triángulo BEΓ es al triángulo ΛHΘ, así el triángulo EΓΔ al triángulo ΛΘK. Y puesto que, como el triángulo ABE es al triángulo ZHΛ, así el (triángulo) EBΓ al (triángulo) ΛHΘ y además el (triángulo) EΓΔ al (triángulo) ΛΘK, entonces, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes a todos los consecuentes [V, 12]. Por tanto, como el triángulo ABE es al triángulo ZHΛ, así el polígono ABΓΔE es al polígono ZHΘKΛ. Pero el triángulo ABE guarda con el triángulo ZHΛ una razón duplicada de la que el lado correspondiente AB (guarda) con el lado correspondiente ZH: porque los triángulos semejantes guardan entre sí una razón duplicada de la de los lados correspondientes [VI, 19]. Por tanto, el polígono ABΓΔE guarda con el polígono ZHΘKΛ una razón duplicada de la que (guarda) el lado correspondiente AB con el lado correspondiente ZH.

Por consiguiente, los polígonos semejantes se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los (polígonos) enteros y un polígono guarda con otro una razón duplicada de la que el lado correspondiente guarda con el lado correspondiente.

Porisma:

De manera semejante, en el caso de los cuadriláteros se demostraría también que guardan una razón duplicada de la de los lados correspondientes. Pero se ha demostrado que también en el caso de los triángulos; de modo que, en general, las figuras rectilíneas guardan entre sí una razón duplicada de la de sus lados correspondientes. Q. E. D.

[Porisma 2:

Y si tomamos la tercera proporcional Ξ de los lados AB, ZH, BA guardan con Ξ una razón duplicada de la que (guarda) AB con ZA. Pero un polígono guarda con otro polígono, o un cuadrilátero con otro cuadrilátero, una razón duplicada de la que (guarda) el lado correspondiente con el lado correspondiente, es decir, AB con ZH; pero se ha demostrado esto también en el caso de los triángulos; de modo que, en general, queda claro que, si tres rectas son proporcionales, como la primera es a la tercera, así será la figura construida sobre la primera a la figura semejante construida de modo semejante sobre la segunda][53].

PROPOSICIÓN 21

Las figuras semejantes a una misma figura rectilínea son también semejantes entre sí.

[53] Heiberg considera el segundo porisma una interpolación debida a Teón.

Pues sea cada una de las figuras A, B semejante a Γ.

Digo que también A es semejante a B.

Pues dado que A es semejante a Γ, también es de ángulos iguales a (los de) ella y tiene proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales [VI, Def. 1].

A su vez, dado que B es semejante a Γ, también es de ángulos iguales a (los de) ella y tiene proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales. Por tanto cada una de las (figuras) A, B es de ángulos iguales a (los de) Γ y tiene los lados que comprenden los ángulos iguales, proporcionales [de modo que también A es de ángulos iguales a (los de) B y tiene los lados que comprenden los ángulos iguales, proporcionales][54].

Por tanto A es semejante a B. Q. E. D.

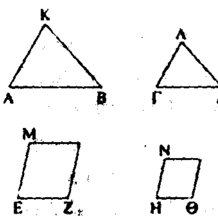
Proposición 22

Si cuatro rectas son proporcionales, las figuras rectilíneas semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, las propias rectas serán también proporcionales.

---

[54] Heiberg considera estas palabras interpoladas por Teón, pues no aparecen en el ms. P.

Sean AB, ΓΔ, EZ, HΘ cuatro rectas proporcionales tales que como AB es a ΓΔ, así EZ a HΘ; y constrúyanse a partir de AB, ΓΔ, las figuras rectilíneas semejantes y situadas de manera semejante KAB, ΛΓΔ, y a partir de EZ, HΘ, las figuras rectilíneas semejantes y situadas de manera semejante MZ, NΘ.



Digo que como KAB es a ΛΓΔ, así MZ a NΘ.

Pues tómese la tercera proporcional, Ξ, a las rectas AB, ΓΔ, y la tercera proporcional, O, a las (rectas) EZ, HΘ [VI, 11]. Y dado que, como AB es a ΓΔ, así EZ a HΘ, y como ΓΔ es a Ξ, así HΘ a O, entonces, por igualdad, como AB es a Ξ, así EZ a O [V, 22]. Pero como AB es a Ξ, así la (figura) KAB a la (figura) ΛΓΔ, y como EZ es a O, así la (figura) MZ a la (figura) NΘ [VI, 19, Por.]; luego también, como la (figura) KAB es a la (figura) ΛΓΔ, así la (figura) MZ a la (figura) NΘ [V, 11].

Pero ahora sea MZ a NΘ como KAB a ΛΓΔ.

Digo que también como AB es a ΓΔ, así EZ a HΘ. Pues si EZ no es a HΘ como AB es a ΓΔ, sea EZ a ΠP como AB a ΓΔ [VI, 12], y constrúyase sobre ΠP la figura rectilínea ΣP semejante y situada de modo semejante a una de las dos (figuras) MZ, NΘ [VI, 18].

Puesto que como AB es a ΓΔ, así EZ a ΠP, y a partir de AB, ΓΔ han sido descritas las (figuras) semejantes y situadas de manera semejante KAB, ΛΓΔ, y, a partir de EZ, ΠP, las (figuras) semejantes y situadas de manera semejante MZ, ΣP; entonces, como KAB es a ΛΓΔ, así MZ a ΣP.

Pero también se ha supuesto que, como KAB es a ΛΓΔ, así MZ a NΘ; entonces, también, como MZ es a ΣP, así MZ a NΘ [V, 11]; luego MZ guarda la misma razón con cada una de

las (figuras) NΘ, ΣP; por tanto NΘ es igual a ΣP [V, 9]. Pero es semejante y situada de manera semejante a ella; por tanto HΘ es igual a ΠP. Y, dado que, como AB es a ΓΔ, así EZ a ΠP, y ΠP es igual a HΘ, entonces, como AB es a ΓΔ, así EZ a HΘ.

Por consiguiente, si cuatro rectas son proporcionales, las figuras rectilíneas semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si las figuras rectilíneas semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, las propias rectas serán también proporcionales. Q. E. D.

[Lema:

Que si las figuras rectilíneas son iguales y semejantes, sus lados correspondientes son iguales entre sí, lo demostraremos de la siguiente manera:

Sean NΘ, ΣP figuras rectilíneas iguales y semejantes y sea PΠ a ΠΣ como ΘH a HN.

Digo que PΠ es igual a ΘH.

Pues, si no son iguales, una de ellas es mayor. Sea mayor PΠ que ΘH. Y dado que, como PΠ es a ΠΣ, así ΘH a HN, y, por alternancia, como PΠ es a ΘH así ΠΣ a HN, y ΠP es mayor que ΘH, entonces ΠΣ es mayor que HN; de modo que también PΣ es mayor que ΘN. Pero también igual. Lo cual es absurdo. Por consiguiente no es el caso de que ΠP no sea igual a HΘ; luego es igual. Q E. D.][55].

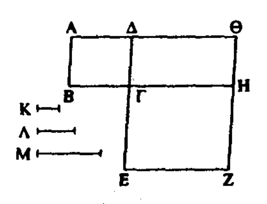
[55] En esta proposición se asume sin prueba que, puesto que las figuras NΘ, ΣP son semejantes y construidas de manera semejante, sus lados correspondientes son iguales. El lema que sigue a la definición trata de suplir esta deficiencia, pero presentarlo tras la proposición va en contra del proceder habitual de Euclides. Por ello Heiberg concluye que se trata de una interpolación, si bien, en este caso, anterior a Teón.

PROPOSICIÓN 23

Los paralelogramos equiángulos guardan entre sí la razón compuesta de (las razones) de sus lados[56].

Sean ΑΓ, ΓΖ paralelogramos equiángulos que tienen el ángulo ΒΓΔ igual al (ángulo) ΕΓΗ.

Digo que el paralelogramo ΑΓ guarda con el paralelogramo ΓΖ la razón compuesta (de las razones de) sus lados.



Pues colóquense de modo que ΒΓ esté en línea recta con ΓΗ; entonces ΔΓ está en línea recta con ΓΕ.

Complétese el paralelogramo ΔΗ, póngase una recta Κ y resulte que, como ΒΓ es a ΓΗ, así Κ a Λ, y como ΔΓ es a ΓΕ, así Λ a Μ [VI, 12].

Entonces, las razones de Κ a Λ y de Λ a Μ son las mismas que las razones de los lados, a saber: de ΒΓ a ΓΗ y de ΔΓ a ΓΕ. Pero la razón de Κ a Μ se compone de la razón de Κ a Λ y de la de Λ a Μ; de modo que también Κ guarda con Μ la razón compuesta de (las de) los lados. Y, dado que, como ΒΓ es a ΓΗ, así el paralelogramo ΑΓ al (paralelogramo) ΓΘ [VI, 1], mientras que, como ΒΓ es a ΓΗ, así Κ a Λ, entonces, también, como Κ es a Λ, así ΑΓ a ΓΘ [V, 11]. Por otra parte, dado que, como ΔΓ es a ΓΕ, así el paralelogramo ΓΘ al (paralelogramo) ΓΖ [VI, 1], pero, como ΔΓ es a ΓΕ, así Λ a Μ, entonces, tam-

[56] Las palabras del texto son *lógon tòn synkeímenon ek tôn pleurôn*, lit., «razón compuesta de los lados», expresión abreviada por *lógon tòn synkeímenon ek tôn (lógōn) tôn pleurôn*.

bién, como Λ es a M, así el paralelogramo ΓΘ al paralelogramo ΓZ [V, 11].

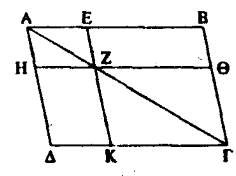
Puesto que se ha demostrado que como K es a Λ, así el paralelogramo AΓ al paralelogramo ΓΘ, y, como Λ es a M, así el paralelogramo ΓΘ al paralelogramo ΓZ, entonces, por igualdad, como K es a M, así el (paralelogramo) AΓ al paralelogramo ΓZ. Pero K guarda con M la razón compuesta de (las de) los lados; entonces AΓ guarda con ΓZ la razón compuesta de (las de) sus lados.

Por consiguiente, los paralelogramos de ángulos iguales guardan entre sí la razón compuesta de (las razones de) sus lados. Q. E. D.[57].

Proposición 24

En todo paralelogramo, los paralelogramos situados en torno a su diagonal son semejantes al (paralelogramo) entero y entre sí.

Sea ABΓΔ un paralelogramo, y su diagonal AΓ, y EH, ΘK los paralelogramos situados en torno a AΓ.



Digo que cada uno de los paralelogramos EH, ΘK es semejante al (paralelogramo) entero ABΓΔ y al otro.

Pues como se ha trazado EZ paralela a uno de los lados BΓ del triángulo ABΓ, proporcionalmente, como BE es a EA, así ΓZ a ZA [VI, 2]. Como se ha trazado a su vez ZH paralela a uno de

[57] Sobre la razón compuesta cf. nota 40 y SIMSON, ed. cit., págs. 324-329.

los lados ΓΔ del triángulo ΑΓΔ, proporcionalmente, como ΓΖ es a ΖΑ, así ΔΗ a ΗΑ [VI, 2]. Pero se ha demostrado que, como ΓΖ es a ΖΑ, así también ΒΕ a ΕΑ; entonces, también, como ΒΕ es a ΕΑ, así ΔΗ a ΗΑ; entonces, por composición, como ΒΑ es a ΑΕ, así ΔΑ a ΑΗ [V, 18] y, por alternancia, como ΒΑ es a ΑΔ, así ΕΑ a ΑΗ [V, 16]. Así pues, en los paralelogramos ΑΒΓΔ, ΕΗ, los lados que comprenden el ángulo común ΒΑΔ son proporcionales. Y puesto que ΗΖ es paralela a ΔΓ, el ángulo ΑΖΗ es igual al (ángulo) ΔΓΑ; y el ángulo ΔΑΓ es común a los dos triángulos ΑΔΓ, ΑΗΖ; por tanto, los triángulos ΑΔΓ y ΑΗΖ son equiángulos. Por lo mismo, los triángulos ΑΓΒ y ΑΖΕ son también equiángulos, y el paralelogramo entero ΑΒΓΔ y el paralelogramo ΕΗ son equiángulos. Entonces, proporcionalmente, como ΑΔ es a ΔΓ, así ΑΗ a ΗΖ, mientras que como ΔΓ es a ΓΑ, así ΗΖ a ΖΑ, y, como ΑΓ es a ΓΒ, así ΑΖ a ΖΕ, y además, como ΓΒ es a ΒΑ, así ΖΕ a ΕΑ. Puesto que se ha demostrado también que, como ΔΓ es a ΓΑ, así ΗΖ a ΖΑ, mientras que, como ΑΓ es a ΓΒ, así ΑΖ a ΖΕ, entonces, por igualdad, como ΔΓ es a ΓΒ, así ΗΖ a ΖΕ [V, 22]. Por tanto, en los paralelogramos ΑΒΓΔ, ΕΗ, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales. Luego el paralelogramo ΑΒΓΔ es semejante al paralelogramo ΕΗ [VI, Def. 1]. Por lo mismo, el paralelogramo ΑΒΓΔ también es semejante al paralelogramo ΚΘ; entonces, cada uno de los paralelogramos ΕΗ, ΚΘ es semejante al (paralelogramo) ΑΒΓΔ. Pero las (figuras) semejantes a una misma figura rectilínea también son semejantes entre sí [VI, 21]. Por tanto el paralelogramo ΕΗ es semejante al paralelogramo ΘΚ.

Por consiguiente, en todo paralelogramo, los paralelogramos situados en torno a la diagonal son semejantes al (paralelogramo) entero y entre sí. Q. E. D.

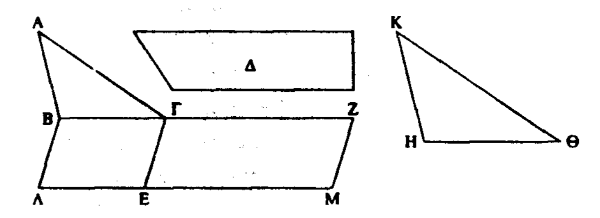
Proposición 25

Construir una misma (figura) semejante a una figura rectilínea dada, e igual a otra (figura) dada.

Sea ABΓ la figura rectilínea dada a la que debe ser semejante la figura que hay que construir y Δ (la figura) a la que debe ser igual.

Así pues, hay que construir una misma (figura) semejante a ABΓ e igual a Δ.

Aplíquese, pues, al (lado) BΓ el paralelogramo BE igual al triángulo ABΓ [I, 44], y a ΓE el paralelogramo ΓM igual a Δ



en el ángulo ZΓE que es igual al (ángulo) ΓBΛ [I, 45]. Entonces BΓ está en línea recta con ΓZ, y ΛE con EM. Y tómese la media proporcional HΘ a las (rectas) BΓ, ΓZ [VI, 13], y constrúyase a partir de HΘ la (figura) KHΘ semejante y situada de manera semejante a ABΓ [VI, 18].

Puesto que como BΓ es a HΘ, así HΘ a ΓZ, si tres rectas son proporcionales, como la primera es a la tercera, así la (figura construida) a partir de la primera a la figura semejante y construida de manera semejante a partir de la segunda [VI, 19, Por.], entonces, como BΓ es a ΓZ, así el triángulo ABΓ al triángulo KHΘ. Pero también, como BΓ es a ΓZ, así el

paralelogramo BE al paralelogramo EZ [VI, 1]. Entonces también, como el triángulo ABΓ es al triángulo KHΘ, así el paralelogramo BE al paralelogramo EZ. Así pues, por alternancia, como el triángulo ABΓ es al paralelogramo BE, así el triángulo KHΘ es al paralelogramo EZ [V, 16]. Pero el triángulo ABΓ es igual al paralelogramo BE; entonces el triángulo KHΘ es igual al paralelogramo EZ. Pero el paralelogramo EZ es igual a Δ. Entonces el (triángulo) KHΘ es también igual a Δ. Y el triángulo KHΘ es también semejante al (triángulo) ABΓ.

Por consiguiente, se ha construido una misma figura semejante a la figura rectilínea dada ABΓ e igual a otra (figura) dada Δ. Q. E. F. [58].

Proposición 26

Si se quita de un paralelogramo un paralelogramo semejante y situado de manera semejante al paralelogramo entero que tenga un ángulo común con él, está en torno a la misma diagonal que el (paralelogramo) entero.

Pues quítese del paralelogramo ABΓΔ el paralelogramo AZ semejante y situado de manera semejante a ABΓΔ y que tenga el ángulo ΔAB común con él.

Digo que ABΓΔ está en torno a la misma diagonal que AZ.

Pues supongamos que no, pero si es posible, sea la diagonal AΘΓ, y prolongada HZ llévese hasta Θ y trácese por el (punto) Θ, la (recta) ΘK paralela a una de las (rectas) AΔ, BΓ [I, 31].

[58] Se atribuye a Pitágoras una resolución inicial de este importante problema.

Dado que ABΓΔ está en torno a la misma diagonal que KH, entonces, como ΔA es a AB, así HA a AK [VI, 24]. Pero también, por semejanza de los paralelogramos ABΓΔ y EH, como ΔA es a AB, así HA a AE; entonces también como HA es a AK, así HA a AE [V, 11]. Así pues, HA guarda la misma razón con cada una de las (rectas) AK, AE. Por tanto AE es igual a AK [V, 9], la menor a la mayor; lo cual es imposible. Luego no es el caso de que ABΓΔ no esté en torno a la misma diagonal que AZ; por tanto el paralelogramo ABΓΔ está en torno a la misma diagonal que AZ.

Por consiguiente, si se quita de un paralelogramo un paralelogramo semejante y situado de manera semejante al (paralelogramo) entero, que tenga un ángulo común con él, está en torno a la misma diagonal que el paralelogramo entero. Q. E. D.[59].

Proposición 27

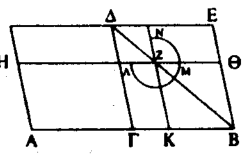
De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramas semejantes y situadas de manera semejante al construido a partir de la mitad de la recta, el (paralelogramo) mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto[60].

[59] Se trata de la proposición conversa de la 24 y no es fácil explicar su situación aquí, detrás de la 25.

[60] Sobre aplicación de áreas, cf. Euclides, *Elementos* I-IV, nota 59. En la proposición 44 del libro I se planteaba el problema de aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada. En VI, 27-29, se trata de paralelogramos aplicados a una misma recta pero que son «deficientes» o que «exceden» de la manera indicada.

Sea AB la recta y divídase en dos partes iguales en el (punto) Γ y aplíquese a la recta AB el paralelogramo AΔ deficiente en la figura paralelograma ΔB construida sobre la mitad de AB, es decir ΓB.

Digo que todos los paralelogramos aplicados a AB y deficientes en las figuras semejantes y situadas de manera semejante a ΔB, el mayor es AΔ.



Pues aplíquese a la recta AB el paralelogramo AZ deficiente en la figura paralelograma ZB semejante y situada de manera semejante a ΔB.

Digo que AΔ es mayor que AZ.

Pues como ΔB es un paralelogramo semejante al paralelogramo ZB, están en torno a la misma diagonal [VI, 26]. Trácese su diagonal ΔB y constrúyase la figura.

Pues bien, dado que ΓZ es igual a ZE y ZB es común [I, 43], entonces el (paralelogramo) entero ΓΘ es igual al (paralelogramo) entero KE. Pero ΓΘ es igual a ΓH, porque AΓ también es igual a ΓB [I, 36]. Por tanto HΓ es también igual a EK. Añádase a ambos ΓZ; entonces el (paralelogramo) entero AZ es igual al gnomon ΛMN; de modo que el paralelogramo ΔB, es decir AΔ, es mayor que el paralelogramo AZ.

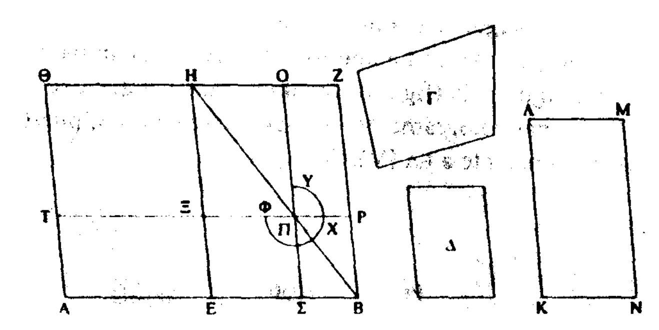
Las proposiciones 27-29 se han considerado como una especie de equivalente geométrico de la forma algebraica más generalizada de ecuaciones cuadráticas cuando tienen una raíz real y positiva. El método expuesto fue muy popular entre los geómetras griegos y se usó muy frecuentemente para la resolución de diferentes problemas. Constituye el fundamento del libro X de los *Elementos* y del procedimiento seguido por Apolonio en el estudio de las secciones cónicas. Simson destaca la enorme utilidad de estas proposiciones, tachando de ignorantes a quienes como Tacquet y Dechales las eliminan de los *Elementos* por considerarlas de escasa utilidad.

Por consiguiente, de todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramas semejantes y situadas de manera semejante al construido a partir de la mitad de la recta, el (paralelogramo) mayor es el aplicado a la mitad de la recta. Q. E. D.

Proposición 28

Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada deficiente en una figura paralelograma semejante a una dada; pero es necesario que la figura rectilínea dada no sea mayor que el paralelogramo construido a partir de la mitad y semejante al defecto[61].

Sea AB la recta dada y Γ la figura rectilínea dada a la que debe ser igual la figura que hay que aplicar a la recta AB, sin



que sea mayor que el (paralelogramo) construido a partir de

[61] La segunda parte del enunciado es un caso claro de *diorismós*. Por otra parte, en esta proposición y en la siguiente se asume tácitamente que, si de dos paralelogramos semejantes uno es mayor que otro, cada lado del mayor es mayor que el lado correspondiente del menor.

la mitad de AB y semejante al defecto; y sea Δ el (paralelogramo) al que ha de ser semejante el defecto.

Así pues, hay que aplicar a la recta dada AB un paralelogramo igual a la figura rectilínea dada Γ deficiente en la figura paralelograma que es semejante a Δ.

Divídase AB en dos partes iguales por el punto E, y constrúyase a partir de EB el (paralelogramo) EBZH semejante y situado de manera semejante a Δ [VI, 18], y complétese el paralelogramo AH.

Si en efecto el (paralelogramo) AH es igual a Γ, se habría hecho lo propuesto; pues ha sido aplicado a la recta dada AB un paralelogramo igual a la figura dada Γ, deficiente en la figura paralelograma HB que es semejante a Δ. Y si no, sea ΘE mayor que Γ. Y ΘE es igual a HB; entonces HB es también mayor que Γ. Constrúyase entonces KΛMN igual al exceso por el que HB es mayor que Γ y semejante y situada de manera semejante a Δ [VI, 25].

Pero Δ es semejante a HB; entonces KM es también semejante a HB [VI, 21]. Sea KΛ correspondiente a HE y ΛM a HZ. Ahora bien, como HB es igual a Γ, KM, entonces HB es mayor que KM; luego HE es también mayor que KΛ, y HZ (mayor) que ΛM. Hágase HΞ igual a KΛ y HO a ΛM, y complétese el paralelogramo ΞHOΠ; entonces es igual y semejante a KM. Luego HΠ es también semejante a HB [VI, 21]; por tanto HΠ está en torno a la misma diagonal que HB [VI, 26]. Sea su diagonal HΠB y constrúyase la figura.

Pues bien, dado que BH es igual a Γ, KM y en ellas HΠ es igual a KM, entonces el gnomon restante ΥXΦ es igual a la (figura) restante Γ. Y, puesto que OP es igual a ΞΣ, añádase a ambos ΠB; entonces el (paralelogramo) entero OB es igual al (paralelogramo) entero ΞB. Pero ΞB es igual a TE, porque el lado AE es también igual a EB [I, 36]; entonces TE es también igual a OB. Añádase a ambos ΞΣ; entonces el (parale-

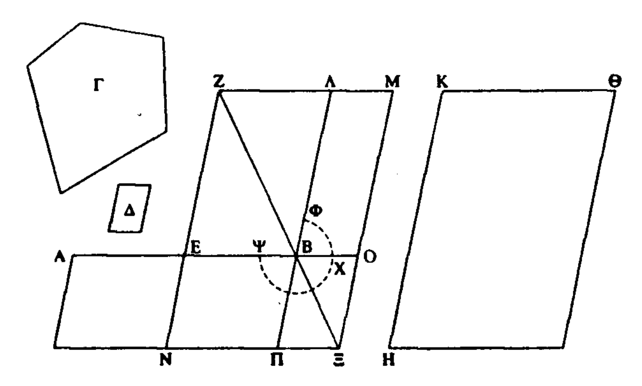
logramo) entero ΤΣ es igual al gnomon entero ΦΧΥ. Pero se ha demostrado que el gnomon ΦΧΥ es igual a Γ; por tanto ΤΣ es igual a Γ.

Por consiguiente se ha aplicado a la recta dada ΑΒ un paralelogramo ΣΤ igual a la figura rectilínea dada Γ, deficiente en la figura paralelograma ΠΒ que es semejante a Δ. Q. E. F.

PROPOSICIÓN 29

Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda en una figura paralelograma semejante a una dada.

Sea ΑΒ la recta dada, Γ la (figura) rectilínea dada igual al (paralelogramo) que hay que aplicar a ΑΒ y Δ la (figura) semejante al (paralelogramo) en que es necesario que exceda.



Así pues, hay que aplicar a la recta ΑΒ un paralelogramo igual a la (figura) rectilínea Γ y que exceda en una figura paralelograma semejante a Δ.

Divídase AB en dos partes iguales por el (punto) E y constrúyase a partir de EB el paralelogramo BZ semejante y situado de manera semejante a Δ, y constrúyase HΘ igual a ambos BZ, Γ y al mismo tiempo semejante y situado de manera semejante a Δ [VI, 25]. Y sea KΘ correspondiente a ZΛ, y KH a ZE. Y puesto que HΘ es mayor que ZB, entonces KΘ es también mayor que ZΛ y KH que ZE. Prolónguense ZΛ, ZE, y sea ZΛM igual a KΘ y ZEN igual a KH, y complétese MN; entonces MN es igual y semejante a HΘ. Pero HΘ es semejante a EΛ; luego MN es semejante también a EΛ [VI, 21]; luego EΛ está en torno a la misma diagonal que MN. Trácese su diagonal ZΞ, y constrúyase la figura.

Puesto que HΘ es igual a EΛ, Γ, mientras que HΘ es igual a MN, entonces MN es también igual a EΛ, Γ. Quítese de ambas EΛ; entonces el gnomon restante ΨXΦ es igual a Γ. Y puesto que AE es igual a EB, AN también es igual a NB [I, 36], es decir, a ΛO [I, 43]. Añádase a ambos EΞ; entonces el (paralelogramo) entero AΞ es igual al gnomon ΦXΨ. Pero el gnomon ΦXΨ es igual a Γ. Por tanto AΞ es igual a Γ.

Por consiguiente, se ha aplicado a la recta AB un paralelogramo AΞ igual a la (figura) rectilínea dada Γ y que excede en la figura paralelograma ΠO que es semejante a Δ, puesto que OΠ es semejante a EΛ [VI, 24]. Q. E. F.

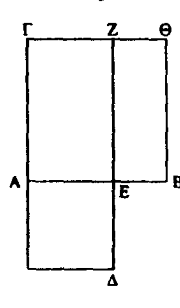
Proposición 30

Dividir una recta finita dada en extrema y media razón.

Sea AB la recta finita dada.

Así pues, hay que dividir la recta AB en extrema y media razón.

Constrúyase a partir de AB el cuadrado BΓ y aplíquese a AΓ el paralelogramo ΓΔ igual a BΓ y que exceda en la figura AΔ semejante a BΓ [VI, 29].



Ahora bien, BΓ es un cuadrado; entonces AΔ es también un cuadrado. Y como BΓ es igual a ΓΔ, quítese de ambos ΓE; entonces el (paralelogramo) restante BZ es igual al (paralelogramo) restante AΔ. Pero son también equiángulos; entonces los lados que comprenden los ángulos iguales de los (paralelogramos) BZ, AΔ son inversamente proporcionales [VI, 14]; entonces, como ZE es a EΔ, así AE a EB. Pero ZE es igual a AB y EΔ a AE. Por tanto, como BA es a AE, así AE a EB. Pero AB es mayor que AE; así pues, AE es también mayor que EB.

Por consiguiente se ha dividido la recta AB en extrema y media razón por E y su segmento mayor es AE. Q. E. F.[62].

Proposición 31

En los triángulos rectángulos, la figura (construida) a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.

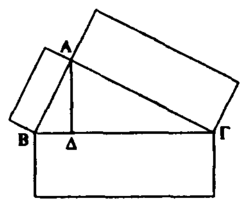
Sea ABΓ el triángulo rectángulo que tiene el ángulo recto BAΓ.

---

[62] Se trata de una aplicación directa de VI 29, en el caso particular de que el exceso del paralelogramo que se aplica sea un cuadrado. Cf. II 11.

Digo que la figura (construida) a partir de BΓ es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados BA, AΓ.

Trácese la perpendicular AΔ.



Puesto que se ha trazado la perpendicular AΔ en el triángulo rectángulo ABΓ desde el ángulo recto A hasta la base BΓ, los triángulos ABΔ, AΔΓ, adyacentes a la perpendicular, son semejantes al (triángulo) completo ABΓ y entre sí [VI, 8].

Y puesto que ABΓ es semejante a ABΔ, entonces, como ΓB es a BA, así AB a BΔ [VI, Def. 1]. Ahora bien, dado que tres rectas son proporcionales, como la primera es a la tercera, así la figura (construida) a partir de la primera es a la (figura) semejante y construida de manera semejante a partir de la segunda [VI, 19, Por.]. Entonces, como ΓB es a BΔ, así la figura (construida) a partir de ΓB es a la (figura) semejante y construida de manera semejante a partir de BA. Por lo mismo, además, como BΓ es a ΓΔ, así la figura (construida) a partir de BΓ es a la (figura) construida a partir de ΓA. De modo que también, como BΓ es a BΔ, ΔΓ, así la figura (construida) a partir de BΓ a las (figuras) semejantes y construidas de manera semejante a partir de BA, AΓ. Pero BΓ es igual a BΔ, ΔΓ; por tanto la figura (construida) a partir de BΓ es también igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de BA, AΓ.

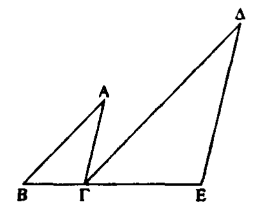
Por consiguiente, en los triángulos rectángulos la figura (construida) a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 32

Si dos triángulos que tienen dos lados (de uno) proporcionales a dos lados (del otro) se construyen unidos por un ángulo[63] *de modo que sus lados correspondientes sean paralelos, los restantes lados de los triángulos estarán en línea recta.*

Sean ABΓ, ΔΓE dos triángulos que tienen los dos lados BA, AΓ proporcionales a los dos lados ΔΓ, ΔE (es decir) como AB es a AΓ, así ΔΓ a ΔE, y AB paralela a ΔΓ y AΓ a ΔE.

Digo que BΓ está en línea recta con ΓE.



Pues como AB es paralela a ΔΓ, y la recta AΓ ha incidido sobre ellas, los ángulos alternos BAΓ, AΓΔ son iguales entre sí [I, 29]. Por lo mismo el (ángulo) ΓΔE es también igual al (ángulo) AΓΔ. De modo que también el (ángulo) BAΓ es igual al ángulo ΓΔE. Y puesto que ABΓ, ΔΓE, son dos triángulos que tienen un ángulo, el correspondiente a A, igual a un ángulo, el correspondiente a Δ, y los lados que comprenden los ángulos iguales, proporcionales (es decir que) como BA es a AΓ, así ΓΔ a ΔE, entonces el triángulo ABΓ y el triángulo ΔΓE son equiángulos [VI, 6]. Por tanto el ángulo ABΓ es igual al (ángulo) ΔΓE. Pero se ha demostrado que el (ángulo) AΓΔ es también igual al (ángulo) BAΓ; luego el (ángulo) entero AΓE es igual a los dos (ángulos) ABΓ, BAΓ. Añádase a ambos el (ángulo) AΓB; entonces los (ángulos) AΓE, AΓB son iguales a

[63] La expresión griega es *syntithênai katà mian gōnian.*

los (ángulos) BAΓ, AΓB, ΓBA. Pero los (ángulos) BAΓ, ABΓ, AΓB son iguales a dos rectos [I, 32]; luego los (ángulos) AΓE, AΓB son también iguales a dos rectos. Por tanto, las dos rectas BΓ, ΓE que no están en el mismo lado forman con una recta AΓ y en su punto Γ los ángulos adyacentes AΓE, AΓB iguales a dos rectos; por tanto BΓ está en línea recta con ΓE [I, 14].

Por consiguiente, si dos triángulos que tienen dos lados (de uno) proporcionales a dos lados (del otro) se construyen unidos por un ángulo de modo que sus lados correspondientes sean paralelos, los restantes lados de los triángulos estarán en línea recta. Q. E. D.

Proposición 33

En los círculos iguales, los ángulos guardan la misma razón que las circunferencias sobre las que están, tanto si están en el centro como si están en las circunferencias[64].

Sean ABΓ, ΔEZ los círculos iguales y sean BHΓ, EΘZ los ángulos correspondientes a sus centros (H, Θ) y BAΓ, EΔZ los (ángulos) correspondientes a sus circunferencias.

Digo que: como la circunferencia BΓ es a la circunferencia EZ, así el ángulo BHΓ al (ángulo) EΘZ y el ángulo BAΓ al (ángulo) EΔZ.

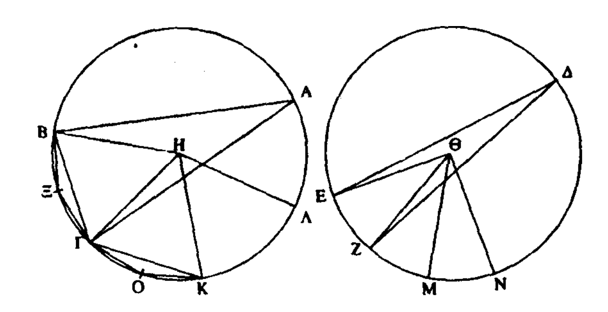
Pues háganse tantas circunferencias sucesivas ΓK, KΛ como se quiera iguales a BΓ y tantas circunferencias sucesivas ZM, MN como se quiera, iguales a EZ, y trácense HK, HΛ, ΘM, ΘN.

Así pues, como las circunferencias BΓ, ΓK, KΛ son iguales entre sí, los ángulos BHΓ, ΓHK, KHΛ son también iguales entre sí [III, 27]; entonces cuantas veces BΛ es múltiplo de

---

[64] Cf. EUCLIDES, *Elementos* III (núm. 155 de la B.C.G.), Definiciones, pág. 292, nota 84.

BΓ, tantas veces el ángulo BHΛ es también múltiplo del (ángulo) BHΓ. Por lo mismo, también, cuantas veces la cir-



cunferencia NE es múltiplo de la circunferencia EZ, tantas veces el ángulo NΘE es múltiplo también del (ángulo) EΘZ. Entonces, si la circunferencia BΛ es igual a la circunferencia EN, el ángulo BHΛ es también igual al (ángulo) EΘN [III, 27], y si la circunferencia BΛ es mayor que la circunferencia EN, el ángulo BHΛ es también mayor que el (ángulo) EΘN, y si es menor, menor. Habiendo entonces cuatro magnitudes, las dos circunferencias BΓ, EZ y los dos ángulos BHΓ, EΘZ, se han tomado unos equimúltiplos de la circunferencia BΓ y del ángulo BHΓ, a saber: la circunferencia BΛ y el ángulo BHΛ; y otros equimúltiplos de la circunferencia EZ y el ángulo EΘZ, a saber: la circunferencia EN y el ángulo EΘN.

Ahora bien, se ha demostrado que, si la circunferencia BΛ excede a la circunferencia EN, el ángulo BHΛ excede también al ángulo EΘN, y si es igual, es igual, y si menor, menor. Entonces, como la circunferencia BΓ es a la (circunferencia) EZ, así el ángulo BHΓ al (ángulo) EΘZ [V, Def. 5]. Pero, como el ángulo BHΓ es al (ángulo) EΘZ, así el (ángulo) BAΓ al (ángulo) EΔZ; pues son dobles respectivamente. Entonces, como la circunferencia BΓ es a la circunferencia EZ,

así el ángulo BHΓ al (ángulo) EΘZ y el (ángulo) BAΓ al (ángulo) EΔZ.

Por consiguiente, en los círculos iguales, los ángulos guardan la misma razón que las circunferencias sobre las que están, tanto si están en el centro como si están en las circunferencias. Q. E. D.[65].

---

[65] La asunción tácita de que el ángulo que está en un arco mayor es mayor, y el que está en un arco menor es menor, se deduciría fácilmente de III, 27.

2. Un número es una pluralidad compuesta de unidades[67].

---

del punto en que la unidad no tiene posición (*Metafísica* 1016b25). De acuerdo con esta última distinción, Aristóteles llama a la unidad «un punto sin posición» *stigmè áthetos* (*Metafísica* 1084b26).

e. Por último, Jámblico dice que la escuela de Crisipo define la unidad de una forma confusa (*synkechyménōs*), a saber: como «pluralidad uno» (*plêthos hén*).

La definición de Euclides parece dirigida a separar la unidad de la multiplicidad y de la divisibilidad —lo cual, en cierto modo, supondría una exclusión de las fracciones (cf. Platón, *República* 525e)—. Pero, en todo caso, su utilidad matemática es muy inferior a sus resonancias filosóficas. El propio Platón ya había reparado, con cierta gracia, en esta dimensión de la definición «moderna»: «Hombres asombrosos, ¿acerca de qué números discurrís, en los cuales se halla la unidad tal como la consideráis, como igual a cualquier otra unidad sin diferir en lo más mínimo y sin contener en sí misma parte alguna?» (*República* VII 526a).

Por lo demás, Teón de Esmirna atribuye la etimología de *monás* «unidad» bien al hecho de permanecer inalterada cuando se multiplica por sí misma cualquier número de veces, o bien al hecho de mantenerse aislada (*memonôsthai*) del resto de los números. Nicómaco observa a su vez que mientras cualquier número es la mitad de la suma de los números adyacentes y de los números equidistantes, por cada lado, la unidad resulta más aislada pues no tiene números a ambos lados sino sólo a uno de ellos, amén de limitarse a ser la mitad del siguiente, el 2.

[67] *Arithmós de tò ek monádōn synkeímenon plêthos.*

La definición de número de Euclides no es, una vez más, sino una de las muchas que conocemos. Nicómaco combina varias en una al decir que es «una pluralidad definida» *(plêthos horisménon)* o un «conjunto de unidades» *(monádōn sýstema)*, o un «flujo de cantidad compuesto por unidades» *(posótētos chŷma ek monádōn synkeimenon)*. Teón dice que un número es una «colección de unidades», o una progresión *(propodismós)* de cantidad que parte de una unidad y una regresión *(anapodismós)* que acaba en una unidad. Según Jámblico, la descripción como colección de unidades fue aplicada a la cantidad, es decir al número, por Tales, que en esto seguía a los egipcios *(katà tò Aigyptiakòn aréskon)*. Mientras que Eudoxo el pitagórico fue quien habló del número como «pluralidad definida».

3. Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor.
4. Pero partes cuando no lo mide[68].
5. Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor[69].

ARISTÓTELES presenta una serie de definiciones que insisten sobre lo mismo: «una pluralidad definida» *plêthos tò peperasménon* (*Metafísica* 1020a13); «pluralidad o combinación de unidades» o «pluralidad de indivisibles» (*ibid.* 1053a30, 1039a12, 1085b22); «varios unos» *héna pleiō* (*Física* III 7, 207b7); «pluralidad que se puede medir por uno» (*Metafísica* 1057a3) y «pluralidad medida» y «pluralidad de medidas» siempre que la medida sea el uno *tò hén* (*ibid.* 1088a5).

Por otra parte, he traducido el término *plêthos* por «pluralidad» pues así se distingue tanto de *arithmós* «número» como de *posón* «cantidad». Otros contextos de los libros de aritmética exigirán, llegado el caso, una versión diferente.

[68] Si por *méros* «parte» en la definición anterior se entiende una parte alícuota o submúltiplo, con el plural *mére* «partes», en esta definición, Euclides alude a un número de partes alícuotas o a lo que nosotros llamaríamos una fracción propia. De modo que, por ejemplo, el número 2 es parte del número 6, pero el número 4 no es parte sino partes de este mismo número 6.

[69] Esta definición viene a formular la relación recíproca de la establecida en la def. 3 (*supra*). El uso de estas nociones aritméticas en los *Elementos* envuelve algunas suposiciones tácitas sobre la relación de medir una cantidad un número de veces. Por ejemplo: si x mide a y e y mide a z, x mide a z; si x mide a y y mide a z, x mide a $y + z$; si x mide a y y mide a z, x medirá a $y - z$ o a $z - y$ (según que $y > z$ o $y < z$). Pero su limitación mayor es no ofrecer una conceptualización o una explicación de la noción involucrada de medida. Una reconstrucción axiomática moderna de la teoría aritmética de los *Elementos* puede verse en N. MALMENDIER, «Eine Axiomatik zum 7. Buch der *Elemente* von Euklid», *Mathematische-Physikalische Semesterberichte* 22 (1975), 240-254. Puede que el primer ensayo en la dirección de completar el marco de postulados, definiciones y axiomas de la aritmética clásica haya sido la *Arithmetica* de Jordano de Nemore (s. XIII); *vid.* la reciente edición de H. L. BUSARD, *Jordanus de Nemore. De elementis arithmetice artis*, Stuttgart, 1991, 2 vols.

2. Un número es una pluralidad compuesta de unidades[67].

---

del punto en que la unidad no tiene posición (*Metafísica* 1016b25). De acuerdo con esta última distinción, Aristóteles llama a la unidad «un punto sin posición» *stigmè áthetos* (*Metafísica* 1084b26).

e. Por último, Jámblico dice que la escuela de Crisipo define la unidad de una forma confusa (*synkechyménōs*), a saber: como «pluralidad uno» (*plêthos hén*).

La definición de Euclides parece dirigida a separar la unidad de la multiplicidad y de la divisibilidad —lo cual, en cierto modo, supondría una exclusión de las fracciones (cf. PLATÓN, *República* 525e)—. Pero, en todo caso, su utilidad matemática es muy inferior a sus resonancias filosóficas. El propio Platón ya había reparado, con cierta gracia, en esta dimensión de la definición «moderna»: «Hombres asombrosos, ¿acerca de qué números discurrís, en los cuales se halla la unidad tal como la consideráis, como igual a cualquier otra unidad sin diferir en lo más mínimo y sin contener en sí misma parte alguna?» (*República* VII 526a).

Por lo demás, Teón de Esmirna atribuye la etimología de *monás* «unidad» bien al hecho de permanecer inalterada cuando se multiplica por sí misma cualquier número de veces, o bien al hecho de mantenerse aislada (*memonôsthai*) del resto de los números. Nicómaco observa a su vez que mientras cualquier número es la mitad de la suma de los números adyacentes y de los números equidistantes, por cada lado, la unidad resulta más aislada pues no tiene números a ambos lados sino sólo a uno de ellos, amén de limitarse a ser la mitad del siguiente, el 2.

[67] *Arithmós de tó ek monádōn synkeimenon plêthos.*

La definición de número de Euclides no es, una vez más, sino una de las muchas que conocemos. Nicómaco combina varias en una al decir que es «una pluralidad definida» *(plêthos horisménon)* o un «conjunto de unidades» *(monádōn sýstema)*, o un «flujo de cantidad compuesto por unidades» *(posótētos chŷma ek monádōn synkeimenon)*. Teón dice que un número es una «colección de unidades», o una progresión *(propodismós)* de cantidad que parte de una unidad y una regresión *(anapodismós)* que acaba en una unidad. Según Jámblico, la descripción como colección de unidades fue aplicada a la cantidad, es decir al número, por Tales, que en esto seguía a los egipcios *(katà tò Aigyptiakòn aréskon)*. Mientras que Eudoxo el pitagórico fue quien habló del número como «pluralidad definida».

3. Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor.
4. Pero partes cuando no lo mide[68].
5. Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor[69].

Aristóteles presenta una serie de definiciones que insisten sobre lo mismo: «una pluralidad definida» *plêthos tò peperasménon* (*Metafísica* 1020a13); «pluralidad o combinación de unidades» o «pluralidad de indivisibles» *(ibid.* 1053a30, 1039a12, 1085b22); «varios unos» *héna pleiō* (*Física* III 7, 207b7); «pluralidad que se puede medir por uno» (*Metafísica* 1057a3) y «pluralidad medida» y «pluralidad de medidas» siempre que la medida sea el uno *tò hén* (*ibid.* 1088a5).

Por otra parte, he traducido el término *plêthos* por «pluralidad» pues así se distingue tanto de *arithmós* «número» como de *posón* «cantidad». Otros contextos de los libros de aritmética exigirán, llegado el caso, una versión diferente.

[68] Si por *méros* «parte» en la definición anterior se entiende una parte alícuota o submúltiplo, con el plural *mére* «partes», en esta definición, Euclides alude a un número de partes alícuotas o a lo que nosotros llamaríamos una fracción propia. De modo que, por ejemplo, el número 2 es parte del número 6, pero el número 4 no es parte sino partes de este mismo número 6.

[69] Esta definición viene a formular la relación recíproca de la establecida en la def. 3 (*supra*). El uso de estas nociones aritméticas en los *Elementos* envuelve algunas suposiciones tácitas sobre la relación de medir una cantidad un número de veces. Por ejemplo: si x mide a y e y mide a z, x mide a z; si x mide a y y mide a z, x mide a $y + z$; si x mide a y y mide a z, x medirá a $y - z$ o a $z - y$ (según que $y > z$ o $y < z$). Pero su limitación mayor es no ofrecer una conceptualización o una explicación de la noción involucrada de medida. Una reconstrucción axiomática moderna de la teoría aritmética de los *Elementos* puede verse en N. Malmendier, «Eine Axiomatik zum 7. Buch der *Elemente* von Euklid», *Mathematische-Physikalische Semesterberichte* 22 (1975), 240-254. Puede que el primer ensayo en la dirección de completar el marco de postulados, definiciones y axiomas de la aritmética clásica haya sido la *Arithmetica* de Jordano de Nemore (s. xiii); *vid.* la reciente edición de H. L. Busard, *Jordanus de Nemore. De elementis arithmetice artis*, Stuttgart, 1991, 2 vols.

12. Un número primo es el medido por la sola unidad[74].
13. Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común.
14. Número compuesto es el medido por algún número.

---

nos «sólo» estaría de más. Recordemos así mismo el caso de la proposición IX 34 que muestra claramente cuál es el punto de vista de Euclides.

Por otro lado, las proposiciones IX 33 y 34, también dan motivos para excluir la definición que Heiberg considera como una interpolación *(vid.* la nota anterior). De acuerdo con ella, un número parmente impar podría resultar también imparmente par. De modo que si tanto esta presunta definición 10 como la definición 9 fueran genuinas, las proposiciones IX 33 y IX 34 plantearían serios problemas. Pues en IX 33 podría darse el caso de que un número no fuera «sólo» parmente impar; y la prueba de IX 34 no dejaría de ser equívoca.

[74] Nicómaco, Teón y Jámblico añaden a «número primo» *prôtos arithmós* el término *asýnthetos* «no compuesto». Teón lo define de manera similar a Euclides como «el medido por ningún número excepto la unidad». ARISTÓTELES dice también que un número primo no es medido por ningún número (*Analíticos Segundos* II 13, 16a36), pues la unidad no es un número (*Metafísica* 1088a6), sino sólo el principio del número. Para Nicómaco, los números primos no son una subdivisión de los números en general sino sólo de los impares. Dice que un número primo no admite otra parte (i.e., otro submúltiplo) que la que tiene su nombre derivado del del propio número (*parónymon heautôi*), por ejemplo «tres» no admite otra parte que «un tercio». Según esta teoría, los números primos empiezan por el 3, mientras que para Aristóteles el 2 sería el primer número primo y el único par. El testimonio aristotélico demuestra que esta divergencia con la doctrina pitagórica es anterior a Euclides. El número 2 cumple las condiciones de la definición euclídea, lo que sirve a Jámblico de pretexto para criticar a Euclides una vez más.

A los números primos se aplican en griego también otros nombres diferentes de *prôtos*. Jámblico los llama *euthimetrikoi*; Timaridas, *euthygrammikoi* «rectilíneos»; y una variante del anterior, *grammikoi*, «lineales», es el utilizado por Teón de Esmirna: ambas tienen en cuenta que sólo pueden ser representados por una línea.

Según Nicómaco, el término *prôtoi* se debe a que sólo se puede llegar a ellos juntando unidades y la unidad es el principio del número.

15. Números compuestos entre sí son los medidos por algún número como medida común[75].
16. Se dice que un número multiplica a un número cuando el multiplicado se añade (a sí mismo) tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número[76].
17. Cuando dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número), el resultado se llama (número) plano y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí[77].

---

[75] Teón define los números compuestos entre sí de manera similar a Euclides, y pone como ejemplo el 8 y el 6, que tienen al 2 como medida común, y el 6 y el 9, que cuentan con el 3. La clasificación euclídea de números primos y compuestos entre sí difiere, sin embargo, de las de Nicómaco y Jámblico. Este último considera que todos estos tipos de números son subdivisiones sólo de la clase de los números impares, mientras que los números pares se dividen, a su vez, en tres tipos: a) parmente pares ; b) parimpares; c) imparpares. Los dos primeros, a y b, son los casos extremos, y los del tipo c son intermedios entre los otros dos tipos. Del mismo modo, la clase de los números impares se divide en tres tipos, de los que el tercero es intermedio entre los otros dos: a) primos y no compuestos: que equivalen a los números primos de Euclides con excepción del 2; b) secundarios y no compuestos: cuyos factores deben ser no sólo impares sino primos, por ejemplo 9, 15, 21...; c) secundarios y compuestos en sí mismos pero primos en relación con otros. También en este caso los factores deben ser impares y primos. Esta clasificación es objetable por limitar un término tan amplio como «compuesto» a los casos formados por factores primos.

[76] Traduzco *syntethêi* por «se añade (a sí mismo)» para que resulte inteligible en castellano. Se trata de la definición sobradamente conocida de la multiplicación como suma abreviada.

[77] Los términos plano y sólido aplicados a números proceden de la adaptación de su uso con referencia a figuras geométricas. De acuerdo con esto, un número recibe la calificación de lineal cuando es contemplado como si constara de una sola dimensión, la longitud. Cuando se le añade otra dimensión, la anchura, resulta un número plano, cuya forma más común es la que corresponde al rectángulo en Geometría. En la tradición pitagórica no dejaron de abundar estas y otras muestras de números figura-

18. Cuando tres números, al multiplicarse entre sí, hacen algún número, el resultado es un (número) sólido y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí.
19. Un número cuadrado es el multiplicado por sí mismo o el comprendido por dos números iguales.
20. Y un (número) cubo el multiplicado dos veces por sí mismo o el comprendido por tres números iguales[78].
21. Unos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto[79].
22. Números planos y sólidos semejantes son los que tienen los lados proporcionales.

---

dos (e.g. los números cuadrados, generados por la adición de un *gnómon* impar, o los números oblongos, generados por la adición de un *gnómon* par).

Por otra parte, el griego utiliza el verbo *poiéō* «hacer» para significar el proceso de la multiplicación y *gígnomai* para el resultado.

[78] Para las definiciones de número cuadrado y número cubo Euclides emplea las curiosas expresiones *isákis ísos* e *isákis ísos isákis* respectivamente, cuya traducción literal es la siguiente: «igual número de veces igual» (Def. 19) e «igual número de veces igual número de veces igual».

Nicómaco distingue un caso especial de número cuadrado que acaba (en la notación adoptada) en el mismo dígito o numeral que su lado, por ejemplo: 1, 25, 36, cuadrados de 1, 5 y 6 respectivamente. A estos números los llama cíclicos *(kyklikoí)* por analogía con los círculos, en geometría, que vuelven al punto donde han empezado. Por la misma razón a los números cubos que acaban con el mismo dígito que sus lados y los cuadrados de sus lados los llama esféricos.

[79] Euclides no se plantea la noción de proporción en los mismos términos que otros autores anteriores o posteriores que definen la proporción como «igualdad o semejanza de razones». Por otra parte, habla normalmente de números «continuamente proporcionales» en el sentido de «proporcionales en orden, o sucesivamente».

23. Número perfecto[80] es el que es igual a sus propias partes[81].

---

[80] La ley de formación de los números perfectos, dada por la fórmula *2n (2n − 1)* cuando *2n − 1* es un número primo, se demuestra más adelante, en IX 36. Teón de Esmirna y Nicómaco añaden otros dos tipos de números: los «superperfectos», *hypertelês* o *hypertéleios*, cuando la suma de sus partes alícuotas (submúltiplos) es mayor que el propio número, por ejemplo la suma de las partes de *12* es *6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16*, y los «defectivos», *ellipês*, cuando la suma de las partes es menor que el propio número, por ejemplo la suma de las partes de *8* es *4 + 2 + 1 = 7*.

[81] Los libros VII-IX cubren lo que podría llamarse «aritmética teórica elemental» griega. La suerte de la aritmética no deja de ser un tanto curiosa en Grecia. Por una parte, no tardó mucho en verse disociada de la «logística» práctica, *i.e.* de las técnicas comunes de cálculo aplicadas a llevar las cuentas y a traficar con objetos materiales, a menesteres de carácter administrativo o mercantil. Al propio Pitágoras se le atribuyó una primera depuración filosófica o «teórica» de la aritmética: «Pitágoras honró la aritmética más que ningún otro. Hizo grandes avances en ella, sacándola de los cálculos prácticos de los comerciantes y tratando todas las cosas como números» (Aristóxeno, fr. 23). Esta «liberación», al parecer, no impidió a los pitagóricos mantener antiguos hábitos intuitivos de cálculo, como el de operar con guijarros o marcas (*logídsesthai psêphois*). Pero sí pudo contribuir a cierta idealización de los números y a la consideración de una «logística» teórica, interesada en propiedades y relaciones numéricas generales. Y, desde luego, contribuyó a elevar los números y sus relaciones, o «configuraciones», a la dignidad de símbolos iniciáticos o claves de comprensión del universo. Así, en pitagóricos tan notables como Filolao, la aritmética parece inseparable de la numerología. Una numerología que no dejará de tener varia y curiosa fortuna: cobra enjundia metafísica en el s. IV a. C. (con Espeusipo y Jenócrates); mucho más tarde, a partir del neopitagorismo del s. II d. C., retorna a la aritmología simbólica (e.g. en Nicómaco, Teón de Esmirna); luego, de la mano de Jámblico (s. IV), viene a desembocar en la teología. Por otro lado, al margen de los dos caminos principales de la aritmética griega (el de la teoría de los números —en parte recogida y en parte normalizada por los *Elementos*— y el de la simbología numerológica), irán quedando otras sugerencias sobre el desarrollo numérico de la razón y la proporción, innovaciones notacionales como

PROPOSICIÓN 1

Dados dos números desiguales y restándose sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al

---

la del *Arenario* de Arquímedes, investigaciones métricas como las de Herón o primicias «algebraicas» como las de Diofanto.

En realidad, la misma aparición de estos libros de aritmética en los *Elementos* de Euclides no deja de ser un tanto curiosa. Desde un punto de vista sistemático, sólo podría justificarse por relación a ciertas aplicaciones en el libro X. En todo caso, algunos desarrollos como los de la teoría del par/impar, o los primos relativos o la teoría misma de la proporción numérica, dan la impresión de que Euclides trabaja con un legado autónomo y autosuficiente. Es cierto que, en la tradición, la aritmética y la geometría se consideraban de la misma familia: al decir de Arquitas (según PORFIRIO, *In Ptol. Harm.* I 330, 26-331, 8), parecían «hermanas»; tampoco conviene olvidar el legado pitagórico de los números figurados. Pero, por otra parte, los números y las magnitudes geométricas son, según otra tradición no menos persistente, entidades dispares. No sólo por motivos de orden matemático (como el caso de la inconmensurabilidad o la perspectiva de la teoría generalizada de la proporción), sino también, quizás, por motivos filosóficos, e.g. la «pureza» mayor de la aritmética con respecto al mundo sensible, la categorización de lo discreto y lo continuo, la índole misma de los números como objetos susceptibles de hallazgo o determinación pero no de conformación o construcción —no hay postulados ni problemas expresos en los libros de aritmética de los *Elementos*—. En suma, la pregunta de por qué aparece aquí el venerable legado de la teoría de los números, puede todavía considerarse abierta.

Otra cuestión añadida es la curiosa circunstancia de que hoy no dispongamos de unos *Elementos de aritmética* dentro de la tradición matemática griega. Sobre la base de la antigüedad de buena parte del material con que trabaja Euclides, hay quienes insisten en la presunta existencia de unos *Elementos* pitagóricos [e.g. B. L. VAN WAERDEN, «Die postulate und Konstruktionen in der frühgriechischen Geometrie», *Archive for History of Exact Sciences* 18 (1978), 343-357; L. ZHMUD, «Pythagoras as a Mathematician», *Historia Mathematica* 16 (1989), 249-268]. No hay datos que

anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí.

Pues sean AB, ΓΔ dos números [desiguales] tales que, restándose sucesivamente el menor del mayor, el que quede no mida nunca al anterior hasta que quede una unidad.

Digo que AB, ΓΔ son primos entre sí, es decir que la sola unidad mide a AB, ΓΔ.

Pues si AB, ΓΔ no son primos entre sí, algún número los medirá. Mídalos (un número) y sea E; y ΓΔ, al medir a BZ, deje ZA menor que él mismo, y AZ, al medir a ΔH, deje HΓ menor que él mismo, y HΓ, al medir a ZΘ, deje una unidad ΘA.

Así pues, como E mide a ΓΔ, y ΓΔ mide también a BZ, entonces E mide también a BZ; pero mide también al total BA; por tanto medirá también al resto AZ. Ahora bien, AZ mide a ΔH; entonces E mide también a ΔH; pero mide así mismo al total ΔΓ; por tanto medirá también al resto ΓH. Pero ΓH mide a ZΘ; y mide así mismo al total ZA; luego medirá también a la unidad restante AΘ, aun siendo un número; lo cual es imposible. Por tanto, ningún número medirá a los números AB, ΓΔ.

---

corroboren la inferencia. Pasando a otros tiempos muy posteriores —incluso a Euclides—, también se ha sugerido la existencia de unos *Elementos* de Diofanto [J. Chistianidis, «*Arithmetikè Stoikheiosis*: Un traité perdu de Diophante d'Alexandrie?», *Historia Mathematica* 18 (1991), 239-246]; pero la principal base aducida, un escolio de un bizantino anónimo al *Comentario a la Introducción a la aritmética de Nicómaco*, de Jámblico, no parece demasiado fuerte para sostener esta conjetura. No obstante, sigue en pie la afirmación de Proclo de que «muchos autores han escrito tratados de *Elementos* sobre aritmética y astronomía» (73, 12-14).

Por consiguiente, AB, ΓΔ son primos entre sí [VII, Def. 13]. Q. E. D.

Proposición 2

Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.

Sean AB, ΓΔ los dos números dados no primos entre sí.

Así pues, hay que hallar la medida común máxima de AB, ΓΔ.

Si en efecto ΓΔ mide a AB, y se mide también a sí mismo, entonces ΓΔ es medida común de ΓΔ, AB. Y está claro que también es la máxima, pues ninguna mayor que ΓΔ medirá a ΓΔ.

Pero si ΓΔ no mide a AB, entonces, restándose sucesivamente el menor de los (números) AB, ΓΔ del mayor, quedará un número que medirá al anterior. Pues no quedará una unidad: porque en otro caso AB, ΓΔ serán primos entre sí [VII, 1], que es precisamente lo que se ha supuesto que no. Así pues, quedará un número que medirá al anterior. Ahora bien, ΓΔ, al medir a BE, deje EA menor que él mismo, y EA, al medir a ΔZ, deje ZΓ menor que él mismo, y mida ΓZ a AE. Así pues, como ΓZ mide a AE, y AE mide a ΔZ, entonces ΓZ medirá también a ΔZ; pero se mide también a sí mismo; entonces medirá también al total ΓΔ. Pero ΓΔ mide a BE; luego ΓZ mide a BE; y mide también a EA; por tanto medirá también al total BA; pero mide también a ΓΔ; entonces ΓZ mide a AB, ΓΔ. Por tanto, ΓZ es medida común de AB, ΓΔ.

Digo ahora que también es la máxima. Pues, si ΓΖ no es la medida común máxima de AB, ΓΔ, un número que sea mayor que ΓΖ medirá a los números AB, ΓΔ. Mídalos (un número) y sea H. Y como H mide a ΓΔ y ΓΔ mide a BE, entonces H mide también a BE; pero también mide al total BA; entonces medirá también al resto AE. Pero AE mide a ΔΖ; por tanto, H medirá a ΔΖ y mide también al total ΔΓ; luego medirá también al resto ΓΖ, esto es: el mayor al menor, lo cual es imposible; así pues, no medirá a los números AB, ΓΔ un número que sea mayor que ΓΖ.

Por consiguiente, ΓΖ es la medida común máxima de AB, ΓΔ.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si un número mide a dos números, medirá también a su medida común máxima. Q. E. D.[82].

[82] Si la proposición anterior puede considerarse como un «test» de la propiedad de ser primos relativos, ahora Euclides ofrece un método no menos eficaz para hallar la medida común máxima de dos números por el mismo método de sustracción recíproca sucesiva (*anthyphaireîn*). Puede que este método proceda de la determinación de razones entre dos secciones del monocordio —como sugiere A. Szabó—. Desde luego, la noción de *anthyphaíresis* parece relacionada con un concepto de razón numérica anterior a Euclides. (Más adelante, en X 2, 3, se encontrará una nueva aplicación en un marco más general.) Por otro lado, la versión modernizada de este procedimiento en términos no ya de sustracción sino de división, y de su resultado como obtención del «máximo común divisor», puede prestarse a equívocos, e.g. al aproximar la aritmética euclídea a la moderna aritmética de fracciones. Mayor confusión sería una mezcla de todo ello tan curiosa como la acepción del uso «matemático» de *anthyphairéo* (referido a X 2, 3) en los términos: «sustraer alternativamente dos magnitudes para hallar el máximo denominador común» —en el *Diccionario Griego-Español* II, Madrid, C.S.I.C., 1986, pág. 309.

PROPOSICIÓN 3

Dados tres números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.

Sean A, B, Γ los tres números dados no primos entre sí.

Así pues, hay que hallar la medida común máxima de A, B, Γ.

A B Γ Δ E Z

Tómese pues la medida común máxima, Δ, de los dos (números) A, B [VII, 2]; entonces Δ o mide o no mide a Γ. En primer lugar mídalo; pero mide también a A, B; entonces Δ mide a A, B, Γ. Luego Δ es una medida común de A, B, Γ.

Digo ahora que también es la máxima. Pues si Δ no es la medida común máxima de A, B, Γ, un número que sea mayor que Δ medirá a los números A, B, Γ. Mídalos y sea E. Así pues, como E mide a A, B, Γ, entonces medirá también a A, B, luego medirá también a la medida común máxima de A, B [VII, 2, Por.]. Pero la medida común máxima de AB es Δ; entonces E mide a Δ, el mayor al menor; lo cual es imposible. Por tanto no medirá a los números A, B, Γ un número que sea mayor que Δ; entonces Δ es la medida común máxima de A, B, Γ.

Ahora no mida Δ a Γ.

Digo, en primer lugar, que Γ, Δ no son primos entre sí. Pues, como A, B, Γ no son primos entre sí, algún número los medirá. Entonces el que mida a A, B, Γ, medirá también a A, B; y medirá también a Δ la medida común máxima de A, B [VII, 2, Por.]; pero mide también a Γ; entonces un número medirá a Δ, Γ; luego Δ, Γ no son primos entre sí. Tómese,

pues, su medida común máxima, E [VII, 2]. Y como E mide a Δ, mientras que Δ mide a A, B, entonces E también mide a A, B; pero mide también a Γ; luego E mide a A, B, Γ; por tanto, E es una medida común de A, B, Γ.

Digo ahora que también es la máxima. Pues, si E no es la medida común máxima de A, B, Γ, un número que sea mayor que E medirá a los números A, B, Γ. Mídalos y sea Z. Ahora bien, como Z mide a A, B, Γ, también mide a A, B; entonces también medirá a la medida común máxima de A, B [VII, 2, Por.]. Pero Δ es la medida común máxima de A, B; entonces Z mide a Δ; y mide también a Γ; luego Z mide a Δ, Γ; por tanto medirá también a la medida común máxima de Δ, Γ [VII, 2, Por.]. Pero E es la medida común máxima de Δ, Γ; entonces Z mide a E, el mayor al menor, lo cual es imposible; por tanto, no medirá a los números A, B, Γ un número que sea mayor que E.

Por consiguiente, E es la medida común máxima de A, B, Γ. Q. E. D.[83].

---

[83] Herón señala que este método nos permite hallar la medida común máxima de tantos números como queramos y no sólo de tres, porque cualquier número que mida a dos números medirá también a su medida común máxima. Así que se trata de ir hallando sucesivamente la medida común máxima de pares de números, hasta que queden sólo dos números de los que se hallará la medida común máxima. Euclides asume tácitamente esta extensión en VII 33 donde se toma la medida común máxima de tantos números como se quiera.

Estas proposiciones iniciales 1-3 del libro VII presentan el llamado «algoritmo» euclídeo para la determinación de números primos y la obtención de la medida común máxima entre dos o más números no primos entre sí. Esa denominación no es inadecuada en la medida en que, ciertamente, representan un procedimiento de cálculo efectivo, i.e. una rutina metódica capaz de conducirnos en una serie finita de pasos a un resultado preciso.

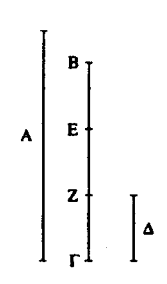
Proposición 4

Todo número es parte o partes de todo número, el menor del mayor.

Sean dos números A, BΓ, y sea el menor BΓ.

Digo que BΓ es parte o partes de A.

Pues A, BΓ o son primos entre sí o no lo son.



En primer lugar sean primos entre sí. Entonces, si se divide BΓ en las unidades que hay en él, cada unidad de las que hay en BΓ será alguna parte de A; de modo que BΓ es partes de A.

Ahora no sean A, BΓ primos entre sí; entonces BΓ o mide a A o no (lo mide). Si en efecto BΓ mide a A, BΓ es parte de A. Pero, si no, tómese la medida común máxima, Δ, de A, BΓ [VII, 2] y divídase BΓ en los (números) BE, EZ, ZΓ iguales a Δ. Ahora bien, como Δ mide a A, Δ es parte de A; pero Δ es igual a cada uno de los (números) BE, EZ, ZΓ; luego cada uno de los (números) BE, EZ, ZΓ es también parte de A. De modo que BΓ es parte de A.

Por consiguiente, todo número es parte o partes de todo número, el menor del mayor. Q. E. D.[84].

[84] En términos modernos se podría resumir como sigue:

Dados dos números A y B, en primer lugar se halla su máximo común divisor, C. Si C es contenido *x* veces en A e *y* veces en B, *x* e *y* precisarán la razón de A a B. De esta forma, la razón de *10* a *15*, por ejemplo, será *2/3*.

PROPOSICIÓN 5

Si un número es parte de un número, y otro es la misma parte de otro, la suma será también la misma parte de la suma que el uno del otro.

Pues sea el número A parte del número BΓ, y otro (número) Δ la misma parte de otro (número) EZ que A de BΓ.

Digo que la suma de A, Δ es la misma parte de la suma de BΓ, EZ que A de BΓ.

Pues como la parte que es A de BΓ, la misma parte es Δ de EZ, entonces, cuantos números hay en BΓ iguales a A, tantos números hay en EZ iguales a Δ. Divídase BΓ en BH, HΓ iguales a A, y EZ en EΘ, ΘZ iguales a Δ. Entonces la cantidad de los (números) BH, HΓ será igual a la cantidad de los (números) EΘ, ΘZ. Y como BH es igual a A y EΘ es igual a Δ, entonces BH, EΘ son iguales a A, Δ. Por lo mismo, HΓ, ΘZ son también iguales a A, Δ. Por tanto, cuantos números hay en BΓ iguales a A, tantos hay en BΓ, EZ iguales a A, Δ. Luego, cuantas veces BΓ es múltiplo de A, tantas veces lo es también la suma de BΓ, EZ de la suma de A, Δ.

Por consiguiente, la parte que A es de BΓ, la misma parte es también la suma de A, Δ de la suma de BΓ, EZ. Q. E. D.[85].

---

[85] En términos modernos se podría resumir:

Dados cuatro números A, B, C, D.

Si $A = (1/n)\ B$ y $C = (1/n)\ D$, entonces $A + C = (1/n)\ (B + D)$.

Esta proposición puede relacionarse con V 1, donde las demostraciones son bastante similares, pero en V 1, se habla de «múltiplo», mientras que en VII 5, se trata de «parte» o submúltiplo.

Proposición 6

Si un número es partes de un número y otro (número) es las mismas partes de otro (número), la suma será también las mismas partes de la suma que el uno del otro.

Pues sea el número AB partes del número Γ, y otro (número) ΔE las mismas partes de otro (número), Z, que AB de Γ.

Digo que la suma de AB, ΔE es también las mismas partes de la suma Γ, Z que AB de Γ.

Pues como las partes que AB es de Γ, las mismas partes es también ΔE de Z, entonces, cuantas partes de Γ hay en AB, tantas partes de Z hay también en ΔE. Divídase AB en las partes AH, HB de Γ, y ΔE en las partes ΔΘ, ΘE de Z; entonces la cantidad de los (números) AH, HB será igual a la cantidad de los (números) ΔΘ, ΘE. Y como la parte que AH es de Γ, la misma parte es también ΔΘ de Z, entonces la parte que es AH de Γ, la misma parte es también la suma de AH, ΔΘ de la suma de Γ, Z [VII 5]. Por lo mismo, la parte que es HB de Γ, la misma parte es también la suma de HB, ΘE de la suma de Γ, Z.

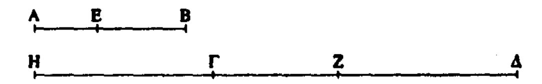
Por consiguiente, las partes que es AB de Γ, las mismas partes es también la suma de AB, ΔE de la suma de Γ, Z. Q. E. D.[86].

[86] Si $A = (m/n)\,B$, $C = (m/n)\,D$, entonces: $A + C = (m/n)\,(B + D)$.

PROPOSICIÓN 7

Si un número es la misma parte de un número que un (número) restado de (un número) restado, el resto será la misma parte del resto que el total del total.

Pues sea el número AB la misma parte del número ΓΔ que el número (restado) AE del (número) restado ΓZ.



Digo que el resto, EB, es también la misma parte del resto, ZΔ, que el total AB del total ΓΔ.

Pues la parte que AE es de ΓZ, la misma parte sea también EB de ΓH. Y como la parte que AE es de ΓZ, la misma parte es también EB de ΓH, entonces la parte que AE es de ΓZ, la misma parte es también AB de HZ [VII, 5]. Pero la parte que AE es de ΓZ, la misma parte se ha supuesto que es AB de ΓΔ; entonces la parte que es AB de HZ, es también la misma parte de ΓΔ, luego HZ es igual a ΓΔ. Quítese de ambos ΓZ; entonces el resto HZ es igual al resto ZΔ. Y como la parte que AE es de ΓZ, la misma parte es también EB de HΓ, y HΓ es igual a ZΔ, entonces la parte que AE es de ΓZ, la misma parte es EB de ZΔ. Ahora bien, la parte que AE es de ΓZ, la misma parte es también AB de ΓΔ.

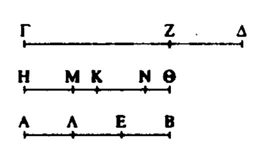
Por consiguiente, el resto EB es la misma parte del resto ZΔ que el total, AB, del total, ΓΔ. Q. E. D.[87].

[87] Si $A = (1/n)\ B;\ C = (1/n)\ D$, entonces: $A - C = (1/n)\ (B - D)$.

PROPOSICIÓN 8

Si un número es las mismas partes de un número que un (número) restado de un (número) restado, el resto será las mismas partes del resto que el total del total.

Pues sea el número AB las mismas partes del número ΓΔ que el (número) restado AE del (número) restado ΓZ.



Digo que el resto EB es las mismas partes del resto ZΔ que el total AB del total ΓΔ.

Hágase HΘ igual a AB. Entonces las partes que HΘ es de ΓΔ, las mismas partes es también AE de ΓZ. Divídase HΘ en las partes HK, KΘ de ΓΔ y AE en las partes AΛ, ΛE de ΓZ; entonces la cantidad de los números HK, KΘ será igual a la cantidad de los (números) AΛ, ΛE. Y como la parte que HK es de ΓΔ, la misma parte es también AΛ de ΓZ, y ΓΔ es mayor que ΓZ, entonces HK es también mayor que AΛ. Hágase HM igual a AΛ. Entonces la parte que HK es de ΓΔ, la misma parte es también HM de ΓZ; por tanto, el resto MK es la misma parte del resto ZΔ que el total HK del total ΓΔ [VII, 7].

Como la parte que KΘ es de ΓΔ, la misma parte es, a su vez, EΛ de ΓZ, y ΓΔ es mayor que ΓZ, entonces ΘK es mayor que EΛ. Hágase KN igual a EΛ. Entonces la parte que KΘ es de ΓΔ, la misma parte es KN de ΓZ. Por tanto, el resto NΘ es la misma parte del resto ZΔ que el total KΘ del total ΓΔ [VII 7]. Pero se ha demostrado que el resto MK es la misma parte del resto ZΔ que el total HK del total ΓΔ; así pues, la suma de MK, NΘ es también las mismas partes de ΔZ que el total ΘH del total ΓΔ. Pero la suma de MK, NΘ es igual a EB, y ΘH a BA.

Por consiguiente, el resto EB es las mismas partes del resto ZΔ que el total AB del total ΓΔ. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 9

Si un número es parte de un número y otro (número) es la misma parte de otro, también, por alternancia, la parte o partes que el primero es del tercero, la misma parte o partes será el segundo del cuarto.

Pues sea el número A parte del número BΓ, y otro (número) Δ la misma parte de otro EZ que A de BΓ.

Digo que también, por alternancia, la parte o partes que A es de Δ, la misma parte o partes es también BΓ de EZ.

Pues como A es parte de BΓ y Δ es la misma parte de EZ, entonces, cuantos números iguales a A hay en BΓ, tantos hay también en EZ iguales a Δ. Divídase BΓ en los (números) BH, HΓ iguales a A, y EZ en los (números) EΘ, ΘZ iguales a Δ; entonces, la cantidad de los (números) BH, HΓ será igual a la cantidad de los (números) EΘ, ΘZ.

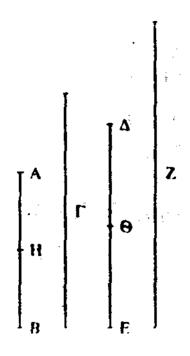
Ahora bien, puesto que los números BH, HΓ son iguales entre sí, y los números EΘ, ΘZ son también iguales entre sí, mientras que la cantidad de los (números) BH, HΓ es igual a la cantidad de los (números) EΘ, ΘZ, entonces la parte o partes que BH es de EΘ, la misma parte o las mismas partes es también HΓ de ΘZ; de modo que también la parte o partes que BH es de EΘ, la misma parte o las mismas partes es la suma de ambos, BΓ, de la suma de ambos, EZ. Pero BH es igual a A y EΘ a Δ.

Por consiguiente, la parte o partes que A es de Δ, la misma parte o las mismas partes es BΓ de EZ. Q. E. D.[88].

Proposición 10

Si un número es partes de un número y otro (número) es las mismas partes de otro, también, por alternancia, las partes o parte que el primero es del tercero, las mismas partes o la misma parte será también el segundo del cuarto.

Pues sea el número AB partes del número Γ, y otro (número) ΔE las mismas partes de otro Z.



Digo que también, por alternancia, las partes o parte que AB es de ΔE, las mismas partes o la misma parte es también Γ de Z.

Pues como las partes que AB es de Γ, las mismas partes es ΔE de Z, entonces, cuantas partes de Γ hay en AB, tantas partes (habrá) también en ΔE de Z. Divídase AB en las partes de Γ, a saber: AH, HB, y ΔE en las partes de Z, a saber: ΔΘ, ΘE; entonces la cantidad de los (números) AH, HB será igual a la cantidad de los (números) ΔΘ, ΘE. Ahora bien, puesto que la parte que AH es de Γ, la misma parte es también ΔΘ de Z, también, por alternancia, la parte o partes que AH es de ΔΘ, la misma parte o las mismas partes es también Γ de Z [VII, 9]. Por lo mismo entonces, la parte o partes que HB es de ΘE, la misma parte o las mismas partes es también Γ de Z; de modo que asimismo [la parte o partes

[88] Si $A = l/n\, B$, $C = (l/n)\, D$, $A = (m/n)\, C$, entonces: $B = (m/n)\, D$.

que AH es de ΔΘ, la misma parte o las mismas partes es también HB de ΘE; por tanto la parte o partes que AH es de ΔΘ, la misma parte o las mismas partes es también AB de ΔE; pero se ha demostrado que la parte o partes que AH es de ΔΘ, la misma parte o las mismas partes es Γ de Z, y entonces] las partes o parte que es AB de ΔE, las mismas partes o parte es también Γ de Z [VII, 5, 6]. Q. E. D.[89].

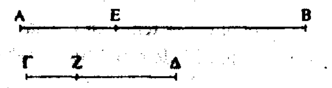
Proposición 11

Si como un todo es a un todo, así es un número restado a un (número) restado, también el resto será al resto como el todo al todo.

Como el todo AB es al todo ΓΔ, sea así el (número) restado AE al (número) restado ΓZ.

Digo que también el resto EB es al resto ZΔ como el todo AB es al todo ΓΔ.

Puesto que, como AB es a ΓΔ, así AE a ΓZ, entonces la parte o partes que AB es de ΓΔ, la misma parte o las mismas partes es AE de ΓZ [VII, Def. 21]. Luego el resto EB es la misma parte o partes de ZΔ que AB de ΓΔ [VII, 7, 8].



Por consiguiente, como EB es a ZΔ, así AB a ΓΔ [VII, Def. 21]. Q. E. D.[90].

[89] Heiberg, sobre la base del ms. P, concluye que el texto entre corchetes es una interpolación atribuible a Teón por figurar en el margen en este importante manuscrito y aparecer escrito por una mano posterior.

[90] Euclides asume en las proposiciones 11-13 que el primer número es menor que el segundo o que el segundo y el tercero. Las figuras de estas

Proposición 12

Si unos números, tantos como se quiera, fueren proporcionales, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes serán a todos los consecuentes.

Sean A, B, Γ, Δ tantos números como se quiera en proporción, (es decir que) como A es a B, así Γ es a Δ.

Digo que como A es a B, así A, Γ a B, Δ.

Pues, dado que, como A es a B, así Γ a Δ, entonces, la parte o partes que A es de B, la misma parte o partes es también Γ de Δ [VII, Def. 21]. Luego la suma de ambos A, Γ es la misma parte o las mismas partes de la suma de ambos B, Δ que A de B [VII, 5, 6].

---

proposiciones son inconsistentes con esta suposición. Si los hechos concuerdan con las figuras hay que tener en cuenta otras posibilidades que se encuentran en la definición 21 de este libro, a saber: que el primer número puede ser también un múltiplo más una parte o partes de cada número con el que se compara. Así pues, habría que tomar en consideración diferentes casos.

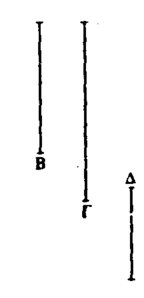
Por lo demás, esta proposición se corresponde con V 19, que se aplica a magnitudes. El enunciado es prácticamente el mismo cambiando *mégethos* «magnitud» por *arithmós* «número». La prueba es una combinación de VII, Def. 21, y los resultados de VII 7-8, y el lenguaje de las proporciones se adapta al de los números y fracciones mediante la definición 21 del libro VII.

Por consiguiente, como A es a B, así A, Γ a B, Δ [VII, Def. 21]. Q. E. D.[91].

PROPOSICIÓN 13

Si cuatro números son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.

Sean A, B, Γ, Δ cuatro números proporcionales (es decir, que) como A es a B, así Γ a Δ.



Digo que también por alternancia, serán proporcionales (es decir, que) como A es a Γ, así B a Δ.

Puesto que, como A es a B, así Γ a Δ, entonces la parte o partes que A es de B, la misma parte o las mismas partes es también Γ de Δ [VII, Def. 21]. Luego, por alternancia, la parte o partes que A es de Γ, la misma parte o las mismas partes es también B de Δ [VII, 10].

Por consiguiente, como A es a Γ, así B a Δ [VII, Def. 21]. Q. E. D.[92].

---

[91] Esta proposición se corresponde con V 12, y, como en el caso de la anterior, el enunciado es prácticamente el mismo sustituyendo «magnitud» por «número». La prueba combina, a su vez, la definición VII 21, y los resultados de VII 5-6, que se declaran verdaderos para cualquier cantidad de números y no sólo para dos como en los enunciados de VII 5-6.

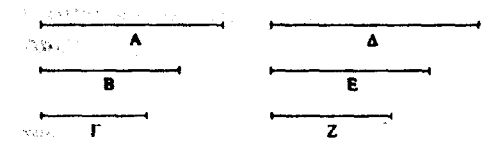
[92] Si $a : b :: c : d$, entonces, por alternancia: $a : c :: b : d$.

La proposición se corresponde con V 16, y la prueba conecta VII, Def. 21, con el resultado de VII 10.

PROPOSICIÓN 14

Si hay unos números, tantos como se quiera, y otros iguales a ellos en cantidad que, tomados de dos en dos, guardan la misma razón, también, por igualdad, guardarán la misma razón.

Sean A, B, Γ tantos números como se quiera y Δ, E, Z otros iguales a ellos en cantidad que, tomados de dos en dos, guardan la misma razón, (es decir que) como A es a B, así Δ a E, y como B es a Γ, así E a Z.



Digo que también, por igualdad, como A es a Γ, así Δ a Z.

Puesto que, como A es a B, así Δ a E, entonces, por alternancia, como A es a Δ, así B a E [VII, 13]. Así mismo, dado que como B es a Γ, así E a Z, entonces, por alternancia, como B es a E, así Γ a Z [VII, 13]. Pero, como B es a E, así A a Δ; por tanto, como A es a Δ, así también Γ a Z; luego, por alternancia, como A es a Γ, así Δ a Z [VII, 13]. Q. E. D.[93].

---

[93] Si $a : b :: d : e$ y $b : c :: e : f$, entonces, por igualdad: $a : c :: d : f$.

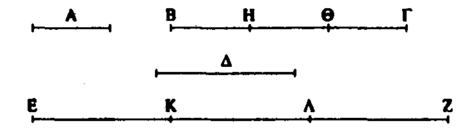
Y lo mismo es verdad sin que importe cuántos sean los sucesivos números relacionados. Este método no puede usarse para la proposición correspondiente de magnitudes (V 22); porque sólo probaría V 22 para seis magnitudes homogéneas, y las magnitudes de V 22 no están sujetas a dicha limitación.

Proposición 15

Si una unidad mide a un número cualquiera, y un segundo número mide el mismo número de veces a otro número cualquiera, por alternancia, la unidad medirá también al tercer número el mismo número de veces que el segundo al cuarto.

Pues mida la unidad A a un número cualquiera ΒΓ, y mida un segundo número, Δ, a otro número cualquiera ΕΖ el mismo número de veces.

Digo que, por alternancia, la unidad A mide también al número Δ el mismo número de veces que ΒΓ a ΕΖ.



Pues como la unidad A mide al número ΒΓ el mismo número de veces que Δ a ΕΖ, entonces, cuantas unidades hay en ΒΓ, tantos números hay en ΕΖ iguales a Δ. Divídase ΒΓ en sus unidades ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, y ΕΖ en los (números) ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ iguales a Δ. Entonces la cantidad de las (unidades) ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ será igual a la cantidad de los (números) ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ.

Ahora bien, puesto que las unidades ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ son iguales entre sí, y los números ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ son también iguales entre sí, mientras que la cantidad de las unidades ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, es igual a la cantidad de los números ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ, entonces, como la unidad ΒΗ es al número ΕΚ, así la unidad ΗΘ será al número ΚΛ y la unidad ΘΓ al número ΛΖ. Así pues,

como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así serán todos los antecedentes a todos los consecuentes [VII, 12]; por tanto, como la unidad BH es al número EK, así BΓ es a EZ. Pero la unidad BH es igual a la unidad A, y el número EK es igual al número Δ. Luego, como la unidad A es al número Δ, así BΓ es a EZ.

Por consiguiente, la unidad A mide al número Δ el mismo número de veces que BΓ a EZ. Q. E. D.[94].

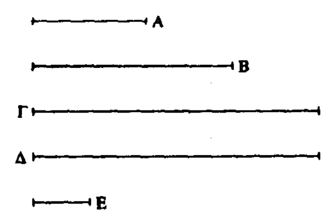
PROPOSICIÓN 16

Si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen ciertos (números), los (números) resultantes serán iguales entre sí[95].

Sean A, B los dos números, y A, al multiplicar a B, haga el (número) Γ, y B, al multiplicar a A, haga el (número) Δ.

Digo que Γ es igual a Δ.

Dado que A, al multiplicar a B ha hecho el (número) Γ, entonces B mide a Γ según las unidades de A. Pero la unidad



E mide también al número A según sus unidades; entonces la unidad E mide al número A el mismo número de veces que B

[94] Esta proposición puede considerarse un caso particular de VII 9.

[95] *Hoi genómenoi ex autôn* «los números resultantes a partir de ellos». Esta expresión es la utilizada normalmente para el resultado de multiplicaciones. En este caso las palabras *ex autôn* resultan ambiguas, se refieren

a Γ. Entonces, por alternancia, la unidad E mide al número B el mismo número de veces que A a Γ [VII, 15]. Puesto que B, al multiplicar a A, ha hecho a su vez el (número) Δ, entonces A mide a Δ según las unidades de B. Pero la unidad E mide también a B según sus unidades; entonces la unidad E mide al número B el mismo número de veces que A a Δ. Pero la unidad E medía al número B el mismo número de veces que A a Γ; por tanto, A mide el mismo número de veces a cada uno de los (números) Γ, Δ.

Por consiguiente, Γ es igual a Δ. Q. E. D.

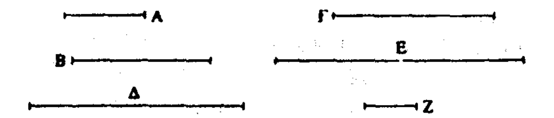
PROPOSICIÓN 17

Si un número, al multiplicar a dos números, hace ciertos (números), los (números) resultantes guardarán la misma razón que los multiplicados.

Pues haga el número A, al multiplicar a los números B, Γ, los (números) Δ, E.

Digo que como B es a Γ, así Δ a E.

Pues dado que A, al multiplicar a B, ha hecho el (nú-



mero) Δ, entonces B mide a Δ según las unidades de A. Pero la unidad Z también mide al número A según sus unidades;

a los números inicialmente dados. Creo que suprimirlas es la mejor manera de deshacer la ambigüedad.

Por otra parte, la proposición prueba que el orden de factores no altera el producto.

entonces la unidad Z mide a A el mismo número de veces que B a Δ. Por tanto, como la unidad Z es al número A, así B es a Δ [VII, Def. 21]. Por lo mismo, como la unidad Z es al número A, así también Γ a E; luego, como B es a Δ, así Γ es a E.

Por consiguiente, por alternancia, como B es a Γ, así Δ a E [VII, 13]. Q. E. D.

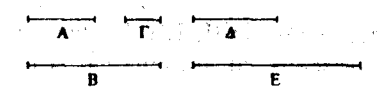
PROPOSICIÓN 18

Si dos números, al multiplicar a un número cualquiera, hacen ciertos (números), los resultantes guardarán la misma razón que los multiplicados.

Pues hagan los dos números A, B, al multiplicar a un número cualquiera, Γ, los (números) Δ, E.

Digo que, como A es a B, así Δ a E.

Pues, dado que A, al multiplicar a Γ, ha hecho el (número) Δ, entonces Γ, al multiplicar a A, también ha hecho el



número Δ [VII, 16]. Por lo mismo, también Γ, al multiplicar a B, ha hecho el número E. Entonces el número Γ, al multiplicar a los dos números A, B, ha hecho los (números) Δ, E.

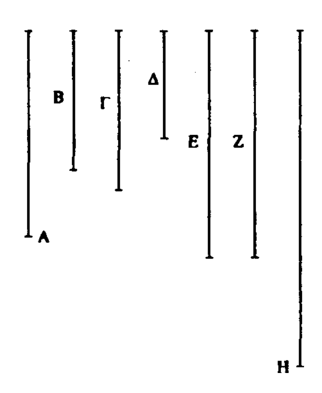
Por consiguiente, como A es a B, así Δ a E [VII, 17]. Q. E. D.

Proposición 19

Si cuatro números son proporcionales, el producto[96] *del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero; y si el producto del primero y el cuarto es igual al producto del segundo y el tercero, los cuatro números serán proporcionales.*

Sean A, B, Γ, Δ cuatro números proporcionales (tales que) como A es a B, así Γ a Δ; y A, al multiplicar a Δ, haga el (número) E, y B, al multiplicar a Γ, haga el (número) Z.

Digo que E es igual a Z.



Pues A, al multiplicar a Γ, haga el (número) H.

Así pues, dado que A, al multiplicar a Γ, ha hecho el (número) H, y, al multiplicar a Δ, ha hecho el (número) E,

[96] A partir de aquí traduzco por «producto» la expresión griega utilizada comúnmente para el resultado de la multiplicación *ho genómenos ek...* «el (número) resultante (o producido) a partir de».

entonces, el número A, al multiplicar a los dos números Γ, Δ, ha hecho los (números) H, E. Luego, como Γ es a Δ, así H es a E [VII, 17]. Pero como Γ es a Δ, así A es a B; entonces, como A es a B, así también H es a E. Puesto que Δ, al multiplicar a Γ, ha hecho a su vez el (número) H, mientras que B, al multiplicar a Γ, ha hecho el (número) Z; entonces, los dos números A, B, al multiplicar a cierto número, Γ, han hecho los (números) H, Z.

Por tanto, como A es a B, así H a Z [VII, 18]. Pero, como A es a B, así H a E; entonces, como H es a E, así también H a Z. Por tanto, H guarda la misma razón con cada uno de los (números) E, Z. Luego E es igual a Z [V, 9].

Sea E ahora igual a Z.

Digo que, como A es a B, así Γ a Δ.

Pues, siguiendo la misma construcción, dado que E es igual a Z, entonces, como H es a E, así H a Z [V, 7]. Pero como H es a E, así Γ a Δ [VII, 17], mientras que, como H es a Z, así A a B [VII, 18].

Por consiguiente, como A es a B, así también Γ a Δ. Q. E. D.[97].

Proposición 20

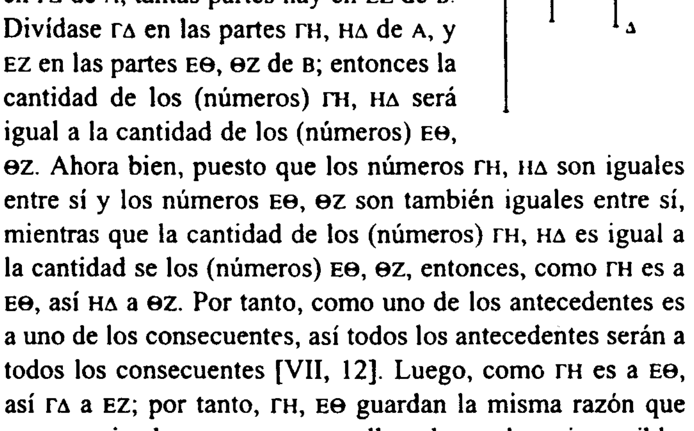
Los números menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos miden a los que guardan la misma razón

[97] Heiberg relega al apéndice una proposición que aparece en los mss. V, p, en el sentido de que, si tres números son proporcionales, el producto de los extremos es igual al cuadrado del medio, y viceversa. No aparece en la primera mano de P; B la tiene en el margen y Campano la omite. Al-Nayrīzī cita la proposición sobre tres números proporcionales como una observación a VII 19 debida probablemente a Herón.

el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor.

Pues sean ΓΔ, EZ los números menores de aquellos que guardan la misma razón que A, B.

Digo que ΓΔ mide a A el mismo número de veces que EZ a B.



Porque ΓΔ no es partes de A, pues, si fuera posible, sea así; entonces EZ es las mismas partes de B que ΓΔ de A [VII, 13 y Def. 21]. Luego, cuantas partes hay en ΓΔ de A, tantas partes hay en EZ de B. Divídase ΓΔ en las partes ΓH, HΔ de A, y EZ en las partes EΘ, ΘZ de B; entonces la cantidad de los (números) ΓH, HΔ será igual a la cantidad de los (números) EΘ, ΘZ. Ahora bien, puesto que los números ΓH, HΔ son iguales entre sí y los números EΘ, ΘZ son también iguales entre sí, mientras que la cantidad de los (números) ΓH, HΔ es igual a la cantidad se los (números) EΘ, ΘZ, entonces, como ΓH es a EΘ, así HΔ a ΘZ. Por tanto, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes serán a todos los consecuentes [VII, 12]. Luego, como ΓH es a EΘ, así ΓΔ a EZ; por tanto, ΓH, EΘ guardan la misma razón que ΓΔ, EZ, siendo menores que ellos; lo cual es imposible: porque se ha supuesto que ΓΔ, EZ son los menores de los que guardan la misma razón que ellos. Luego ΓΔ no es partes de A; entonces es parte (de A) [VII, 4]. Y EZ es la misma parte de B que ΓΔ de A [VII, 13 y Def. 21].

Por consiguiente, ΓΔ mide a A el mismo número de veces que EZ a B. Q. E. D.[98].

[98] Aquí Heiberg omite una proposición que sin duda es una interpolación de Teón (B, V, p la tienen como VII 22, pero P la presenta en el

PROPOSICIÓN 21

Los números primos entre sí son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.

Sean A, B números primos entre sí.

Digo que A, B son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.

A B Γ Δ E

Pues, si no, habrá algunos números menores que A, B que guarden la misma razón que A, B. Sean Γ, Δ.

Así pues, como los números menores de los que guardan la misma razón miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor, es decir, el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20], entonces Γ mide a A el mismo número de veces que Δ a B.

Pues cuantas veces Γ mide a Δ, tantas unidades habrá en E. Por tanto, Δ mide a B según las unidades de E. Pero, puesto que Γ mide a A según las unidades de E, entonces E mide a A según las unidades de Γ [VII, 16]. Luego, por lo mismo, E mide también a B según las unidades de Δ [VII, 16]. Entonces E mide a A, B que son primos entre sí. Lo cual es imposible [VII, Def. 13]. Luego no habrá algunos números menores que A, B que guarden la misma razón con A, B.

---

margen y en la última mano; Campano la omite también). Prueba, para números, la proporción perturbada:

Si $a : b :: e : f$ y $b : c :: d : e$, entonces $a : c :: d : f$.



Por consiguiente, A, B son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos. Q. E. D.



PROPOSICIÓN 22

Los números menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos son primos entre sí.

Sean A, B los números menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.

Digo que A, B son primos entre sí.

Pues, si no son primos entre sí, algún número los medirá. Mídalos (un número) y sea Γ. Y, cuantas veces mide Γ a A, tantas unidades haya en Δ, y, cuantas veces Γ mide a B, tantas unidades haya en E.

Puesto que Γ mide a A según las unidades de Δ, entonces Γ, al multiplicar a Δ, ha hecho el (número) A [VII, Def. 16]. Por lo mismo, también Γ, al multiplicar a E, ha hecho el (número) B. Así pues, el número Γ, al multiplicar a los dos números Δ, E ha hecho los (números) A, B; por tanto, como Δ es a E, así A a B [VII, 17]; entonces Δ, E guardan la misma razón que A, B, siendo menores que ellos, lo cual es imposible. Luego ningún número medirá a los números A, B.

Por consiguiente, A, B son primos entre sí. Q. E. D.[99].

---

[99] BEPPO LEVI, *Leyendo a Euclides*, Rosario, 1947, pág. 208, dice que los enunciados de 20, 21 y 22, suponen implícitamente por lo menos uno de los siguientes hechos: existe un par de números mínimos entre los que guardan una misma razón; existe un par de números primos entre sí entre los pares que guardan la misma razón. Pues, aunque se admite como evi-

PROPOSICIÓN 23

Si dos números son primos entre sí, el número que mide a uno de ellos será primo respecto al restante.

Sean A, B dos números primos entre sí, y mida a A un número cualquiera Γ.

Digo que también Γ, B son primos entre sí.

Pues si Γ, B no son primos entre sí, algún número medirá a Γ, B. Mídalos y sea Δ. Puesto que Δ mide a Γ, mientras que Γ mide a A, entonces Δ mide también a A. Pero mide también a B; entonces Δ mide a A, B que son primos entre sí; lo cual es imposible [VII, Def. 12]. Por tanto ningún número medirá a los números Γ, B.

Por consiguiente, Γ, B son primos entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 24

Si dos números son primos con respecto a otro número, también su producto será primo con respecto al mismo (número).

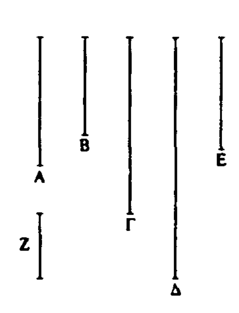
Sean los dos números A, B primos con respecto a un número Γ, y A, al multiplicar a B, haga Δ.

---

dente la existencia de un mínimo en todo sistema de enteros, no es evidente la existencia de un par mínimo.

Digo que Γ, Δ son primos entre sí.

Pues si Γ, Δ no son primos entre sí, algún número medirá a Γ, Δ. Mídalos y sea E. Ahora bien, puesto que Γ, A son primos entre sí, y cierto número E mide a Γ, entonces A, E son primos entre sí [VII, 23]. Entonces, cuantas veces E mide a Δ, tantas unidades hay en Z; por tanto, Z mide también a Δ según las unidades de E [VII, 16]. Luego E, al multiplicar a Z, ha hecho el número Δ [VII, Def. 16]. Pero también A, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Δ; así pues, el (producto) de E, Z es igual al (producto) de A, B. Pero si el producto de los extremos es igual al producto de los medios, los cuatro números son proporcionales [VII, 19].



Entonces, como E es a A, así B es a Z. Pero A, E son primos (entre sí) y los primos son también los menores, y los números menores de los que guardan la misma razón que ellos miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor, es decir: el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]. Por tanto, E mide a B; pero también mide a Γ; luego E mide a B, Γ que son primos entre sí; lo cual es imposible [VII, Def. 13]. Por tanto ningún número medirá a los números Γ, Δ.

Por consiguiente, Γ, Δ son primos entre sí. Q. E. D.

Proposición 25

Si dos números son primos entre sí, el producto de uno de ellos (multiplicado por sí mismo) será primo con respecto al restante[100].

Sean A, B dos números primos entre sí, y A, al multiplicarse a sí mismo, haga Γ.

Digo que B, Γ son primos entre sí.

Hágase, pues, Δ igual a A. Puesto que A, B son primos entre sí, mientras que A es igual a Δ, entonces también Δ, B son primos entre sí. Así pues cada uno de los (números) Δ, A es primo con respecto a B; luego el producto de Δ, A será primo con respecto a B [VII, 24], pero el número producido a partir de Δ, A es Γ.

Por consiguiente, Γ, B son primos entre sí. Q. E. D.

Proposición 26

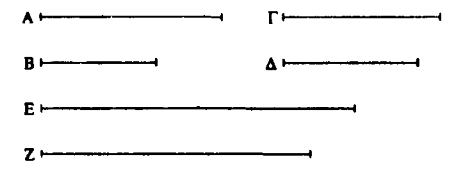
Si dos números son primos con respecto a dos números, uno y otro con cada uno de ellos, sus productos también serán primos entre sí.

[100] *Ho ek toû henòs autôn genómenos*, lit.: «el (número) producido por uno de ellos...» se refiere al producto de dicho número por sí mismo. Añado estas palabras entre paréntesis porque no aparecen en el texto griego. Por otra parte, la proposición es un caso particular de la precedente.

Pues sean A, B dos números primos ambos con respecto a cada uno de los dos números Γ, Δ, y A, al multiplicar a B, haga E, y Γ, al multiplicar a Δ, haga Z.

Digo que E, Z son primos entre sí.

Pues como cada uno de los (números) A, B son primos con respecto a Γ, entonces el producto de A, B también será



primo con respecto a Γ [VII, 24]. Pero el producto de A, B es E; luego E, Γ son primos entre sí. Por lo mismo, Δ, E también son primos entre sí. Entonces cada uno de los (números) Γ, Δ es primo con respecto a E. Por tanto, el producto de Γ, Δ será también primo con respecto a E [VII, 24]. Pero el producto de los (números) Γ, Δ es Z.

Por consiguiente los números E, Z son primos entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 27

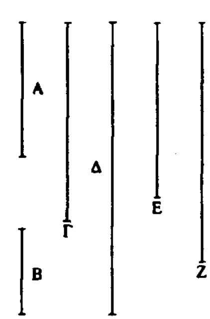
Si dos números son primos entre sí y al multiplicarse cada uno a sí mismo hace algún otro (número), sus productos serán primos entre sí, y si los números iniciales, al multiplicar a los productos, hacen ciertos números, también ellos serán primos entre sí [y siempre sucede esto con los extremos][101].

[101] Heiberg atetiza el final del enunciado porque *ákroi* sólo podría significar «los últimos productos» y porque no hay nada en la prueba que se

Sean A, B dos números primos entre sí, y A al multiplicarse a sí mismo haga el (número) Γ, y al multiplicar a Γ haga el (número) Δ; por otra parte, B al multiplicarse a sí mismo haga el (número) E, y al multiplicar a E haga el (número) Z.

Digo que Γ, E y Δ, Z son primos entre sí.

Pues como A, B son primos entre sí, y A al multiplicarse a sí mismo ha hecho el (número) Γ, entonces Γ, B son primos entre sí [VII, 25]. Dado que, en efecto, Γ, B son primos entre sí y B, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) E, entonces Γ, E son primos entre sí [VII, 25]. A su vez, como A, B son primos entre sí y B al multiplicarse a sí mismo ha hecho el (número) E, entonces A, E son primos entre sí [VII, 25]. Así pues, como los dos números A, Γ son primos ambos con respecto a cada uno de los dos números B, E, entonces el producto de A, Γ es también primo con respecto al (producto) de B, E [VII, 26]. Pero el (producto) de A, Γ es Δ, mientras que el (producto) de B, E es Z.



Por consiguiente, Δ, Z son primos entre sí. Q. E. D.

Proposición 28

Si dos números son primos entre sí, su suma también será un (número) primo con respecto a cada uno de ellos; y si la suma de ambos es un (número) primo con respecto a

---

corresponda con estas palabras. De hecho Campano las omite. Heiberg concluye que se trata de una interpolación anterior a Teón.

:ualquiera de ellos, también los números iniciales se- rimos entre sí.

úmense pues los dos números primos entre sí AB, BΓ.

'igo que también la suma de ›s, AΓ, es un (número) primo con respecto a cada uno de los (números) AB, BΓ.

Pues si ΓA, AB no son primos entre sí, algún número medirá a ΓA, AB. Mídalos y sea Δ. Así pues, como Δ mide a ΓA, AB, entonces medirá también al resto BΓ. Pero mide también a BA; entonces Δ mide a AB, BΓ que son primos entre sí; lo cual es imposible [VII, Def. 13]. Por tanto ningún número medirá a ΓA, AB; luego ΓA, AB son primos entre sí. Por lo mismo, AΓ, ΓB son también primos entre sí. Entonces ΓA es primo con respecto a cada uno de los (números) AB, BΓ.

Sean ahora ΓA, AB primos entre sí.

Digo que AB, BΓ son también primos entre sí.

Pues si AB, BΓ no son primos entre sí, algún número medirá a los (números) AB, BΓ. Mídalos y sea Δ. Ahora bien, como Δ mide a cada uno de los (números) AB, BΓ, entonces medirá también al total ΓA. Pero mide también a AB; entonces Δ mide a los (números) ΓA, AB que son primos entre sí; lo cual es imposible [VII, Def. 13]. Luego ningún número medirá a los (números) AB, BΓ.

Por consiguiente, AB, BΓ son primos entre sí. Q. E. D.

Proposición 29

Todo número primo es primo con respecto a todo (número) al que no mide.

Sea A un número primo y no mida a B.

Digo que B, A son primos entre sí.

Pues si B, A no son primos entre sí, algún número los medirá. Mídalos y sea Γ. Puesto que Γ mide a B, pero A no mide a B, entonces Γ no es el mismo (número) que A. Y puesto que Γ mide a B, A, entonces mide también a A que es primo no siendo el mismo (que Γ); lo cual es imposible; luego ningún número medirá a los (números) B, A.

A

B

Γ

Por consiguiente, A, B son primos entre sí. Q. E. D.

Proposición 30

Si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número) y algún número primo mide a su producto, también medirá a uno de los iniciales.

Hagan, pues, los dos números A, B, al multiplicarse entre sí, el (número) Γ, y mida algún número primo, Δ, al (número) Γ.

Digo que Δ mide a uno de los (números) A, B.

Pues no mida a A; pero Δ es primo; entonces A, Δ son primos entre sí [VII, 29]. Ahora bien, cuantas veces mida Δ

a Γ, tantas unidades haya en E. Así pues, como Δ mide a Γ según las unidades de E, entonces Δ, al multiplicar a E, ha hecho el (número) Γ [VII, Def. 16]. Pero, en efecto, A, al multiplicar a B, ha hecho también el (número) Γ; entonces el (producto) de Δ, E es igual al (producto) de A, B. Luego, como Δ es a A, así B a E [VII, 19]. Pero Δ, A son primos y los primos son también los menores [VII, 21], y los menores miden el mismo número de veces a los que guardan la misma razón, el mayor al mayor y el menor al menor, es decir el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]; así pues, Δ mide a B. De manera semejante demostraríamos que, si no mide a B, medirá a A.

A
B
Γ
Δ
E

Por consiguiente, Δ mide a uno de los (números) A, B. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 31

Todo número compuesto es medido por algún número primo.

Sea A un número compuesto.

Digo que A es medido por algún número primo.

Pues como A es compuesto, algún número lo medirá. Mídalo y sea B. Ahora bien, si B es primo se habría dado lo propuesto. Pero si es compuesto, algún número lo medirá. Mídalo y sea Γ. Pues bien, como Γ mide a B y B mide a A, entonces Γ mide también a A. Y si Γ es primo, se habría dado

A
B
Γ

lo propuesto. Pero si es compuesto, algún número lo medirá. Siguiendo así la investigación se hallará un número primo, que lo medirá[102]. Pues, si no se halla, una serie infinita de números medirán al número A, cada uno de los cuales es menor que otro; lo cual es imposible en el (caso de) los números. Luego se hallará un número primo que medirá al anterior a él mismo, que también medirá a A.

Por consiguiente, todo número compuesto es medido por algún número primo. Q. E. D.

Proposición 32

Todo número o es primo o es medido por algún (número) primo.

Sea A un número.

A

Digo que A o es primo o es medido por algún (número) primo.

Pues si A es primo se habría dado lo propuesto, pero si es compuesto, algún número primo lo medirá [VII, 31].

Por consiguiente, todo número o es primo o es medido por algún (número) primo. Q. E. D.

---

[102] Se echan en falta en esta proposición las palabras «al anterior a él mismo que también medirá a A» que aparecen así unas líneas más abajo. Heiberg piensa que es posible que dichas palabras hayan desaparecido de P en este lugar, debido a un error de *homeoteleuton*. Por otro lado, relega al apéndice una prueba alternativa de esta proposición, cf. HEATH, ed. cit., pág. 333.

PROPOSICIÓN 33

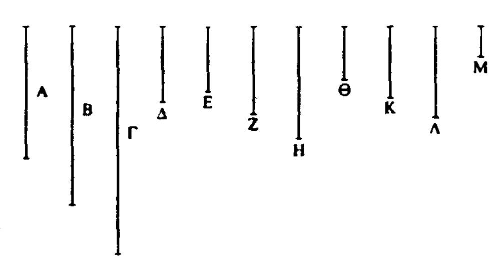
Dados tantos números como se quiera, hallar los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.

Sean A, B, Γ tantos números dados como se quiera.

Así pues hay que hallar los menores de los que guardan la misma razón que A, B, Γ.

Pues A, B, Γ o son primos entre sí o no. Si, en efecto, son primos entre sí, son los menores de los que guardan la misma razón que ellos [VII, 21].

Pero si no, tómese la medida común máxima, Δ, de A, B, Γ; y, cuantas veces mida Δ a cada uno de los (números) A,



B, Γ, tantas unidades haya en cada uno de los (números) E, Z, H. Entonces, los números A, B, Γ miden respectivamente a los (números) E, Z, H, según las unidades de Δ [VII, 16]. Luego E, Z, H miden el mismo número de veces a A, B, Γ; por tanto, E, Z, H guardan la misma razón que A, B, Γ [VII, Def. 21].

Digo además que también son los menores.

Pues si E, Z, H no son los menores de los que guardan la misma razón que A, B, Γ, habrá unos números menores que E, Z, H que guarden la misma razón con A, B, Γ. Sean Θ, K, Λ;

entonces Z mide a A el mismo número de veces que K, Λ miden respectivamente a B, Γ. Ahora bien, cuantas veces Θ mide a Λ, tantas unidades haya en M; entonces K, Λ miden respectivamente a B, Γ según las unidades de M. Y puesto que Θ mide a A según las unidades de M, entonces M mide también a A según las unidades de Θ [VII, 16]. Por lo mismo, M mide a B, Γ según las unidades de K, Λ respectivamente; luego M mide a A, B, Γ. Y como Θ mide a A según las unidades de M, entonces Θ, al multiplicar a M, ha hecho el (número) A [VII, Def. 16]. Por lo mismo, E al multiplicar a Δ ha hecho también el (número) A. Entonces el (producto) de E, Δ es igual al (producto) de Θ, M. Luego, como E es a Θ, así M es a Δ [VII, 19]. Ahora bien, E es mayor que Θ; entonces M es también mayor que Δ, y mide a los (números) A, B, Γ; lo cual es imposible: porque se ha supuesto que Δ es la medida común máxima de A, B, Γ Por tanto, no habrá ningún número menor que E, Z, H que guarde la misma razón que A, B, Γ.

Por consiguiente, E, Z, H son los (números) menores de los que guardan la misma razón con A, B, Γ. Q. E. D.

Proposición 34

Dados dos números, hallar el menor número al que miden.

Sean A, B los dos números dados.

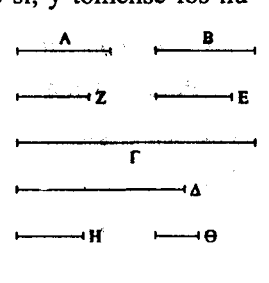
Así pues hay que hallar el menor número al que miden.

Pues bien, A, B o son primos entre sí o no. En primer lugar sean A, B primos entre sí, y A al multiplicar a B haga el (número) Γ; entonces B al multiplicar a A ha hecho también el (número) Γ [VII, 16]. Entonces A, B miden a Γ.

Digo además que también es el menor (número al que miden).

Pues, si no, A, B medirán a algún número que sea menor que Γ. Midan a Δ. Y cuantas veces A mide a Δ, tantas unidades haya en E, y, cuantas veces B mide a Δ, tantas unidades haya en Z; entonces A, al multiplicar a E, ha hecho el (número) Δ, y B, al multiplicar a Z, ha hecho el (número) Δ [VII, Def. 16]; entonces el (producto) de A, E es igual al (producto) de B, Z. Por tanto, como A es a B, así Z a E [VII, 19]; pero A, B son primos, y los primos son también los menores [VII, 21] y los menores miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor [VII, 20]; así pues, B mide a E, como el consecuente al consecuente. Y como A, al multiplicar a B, E, ha hecho los (números) Γ, Δ, entonces, como B es a E, así Γ a Δ [VII, 17]. Pero B mide a E; luego Γ mide también a Δ, el mayor al menor; lo cual es imposible. Por tanto, A, B no miden a algún número que sea menor que Γ. Luego Γ es el menor que es medido por A, B.

Ahora, no sean A, B primos entre sí, y tómense los números menores Z, E de los que guardan la misma razón con A, B [VII, 33]; entonces, el (producto) de A, E es igual al (producto) de B, Z [VII, 19]. Y haga A, al multiplicar a E, el (número) Γ; entonces B, al multiplicar a Z, ha hecho también el (número) Γ; así pues, A, B miden a Γ.



Digo además que también es el menor (número al que miden).

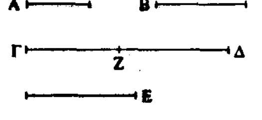
Pues, si no, A, B medirán a algún número que sea menor que Γ. Midan a Δ. Y cuantas veces A mide a Δ, tantas unidades haya en H, y cuantas veces B mide a Δ, tantas unidades haya en Θ. Entonces, A al multiplicar a H ha hecho el número Δ, y B al multiplicar a Θ ha hecho el número Δ. Así pues, el (producto) de A, H es igual al (producto) de B, Θ; luego, como A es a B, así Θ a H [VII, 19]. Pero como A es a B, así Z a E. Por tanto, también, como Z es a E, así Θ a H. Pero Z, E son los menores, y los menores miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor [VII, 20]. Entonces, E mide a H. Y como A, al multiplicar a E, ha hecho los números Γ, Δ, entonces, como E es a H, así Γ a Δ [VII, 17]. Pero E mide a H; luego Γ también mide a Δ, el mayor al menor; lo cual es imposible. Por tanto, A, B no miden a algún número que sea menor que Γ.

Por consiguiente, Γ es el número menor que es medido por A, B. Q. E. D.[103].

Proposición 35

Si dos números miden a algún número, el (número) menor medido por ellos también medirá al mismo (número).

Pues midan dos números A, B a un número ΓΔ y sea E el menor (al que miden).



Digo que E mide también a ΓΔ.

Pues si E no mide a ΓΔ, deje E, al medir a ΔZ, al número menor que sí mismo ΓZ. Y como A, B miden a E y E mide a ΔZ, entonces, A, B medirán también a ΔZ. Pero

[103] Se trata del procedimiento para hallar el mínimo común múltiplo de dos números.

miden también al total ΓΔ; luego, medirán también a ΓΖ que es menor que Ε; lo cual es imposible. Por tanto, no es el caso de que Ε no mida a ΓΔ; por consiguiente lo mide. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 36

Dados tres números, hallar el número menor al que miden.

Sean Α, Β, Γ tres números dados.

Así pues, hay que hallar el número menor al que miden.

Tómese, pues, Δ, el (número) menor que es medido por los dos (números) Α, Β [VII, 34]. Entonces Γ o mide a Δ o no lo mide. En primer lugar, mídalo. Pero Α, Β miden también a Δ; entonces Α, Β, Γ miden a Δ.

Α
Β
Γ
Δ
Ε

Digo además que también es el menor (al que miden).

Pues, si no, Α, Β, Γ medirán a un número que sea menor que Δ. Midan a Ε. Como Α, Β, Γ miden a Ε, entonces Α, Β también miden a Ε. Así pues, el menor (número) medido por Α, Β también medirá [a Ε] [VII, 35]. Pero el menor (número) medido por Α, Β es Δ; entonces, Δ medirá a Ε, el mayor al menor; lo cual es imposible. Luego, Α, Β, Γ no medirán a algún número que sea menor que Δ; por tanto, Δ es el número menor que Α, Β, Γ miden.

Ahora, por el contrario, no mida Γ a Δ, y tómese Ε, el menor número medido por Γ, Δ [VII, 34]. Como Α, Β miden a Δ, pero Δ mide a Ε, entonces, Α, Β miden también a Ε. Pero Γ mide también [a Ε]; entonces Α, Β, Γ miden también [a Ε].

Digo además que es el menor (número al que miden).

Pues, si no, A, B, Γ medirán a algún (número) que sea menor que E. Midan a Z. Como A, B, Γ miden a Z, entonces

A ——— Γ ——— E ———

B ——— Δ ——— Z ———

A, B miden también a Z; luego el menor (número) medido por A, B medirá a Z [VII, 35].

Pero el menor (número) medido por A, B es Δ; entonces, Δ mide a Z. Pero Γ también mide a Z; por tanto, Δ, Γ mide a Z; de modo que el menor (número) medido por Δ, Γ también medirá a Z. Pero el menor (número) medido por Γ, Δ es E. Entonces E mide a Z, el mayor al menor; lo cual es imposible. Por tanto, A, B, Γ no medirán a un número que sea menor que E.

Por consiguiente, E es el menor que es medido por A, B, Γ. Q. E. D.[104].

PROPOSICIÓN 37

Si un número es medido por algún número, el (número) medido tendrá una parte homónima del (número) que lo mide.

Sea medido, pues, A por algún número B.

Digo que A tiene una parte homónima de B.

Pues cuantas veces B mide a A, tantas unidades haya en Γ. Como B mide a A según las unidades de Γ, y la unidad Δ mide al número Γ según sus propias unidades, entonces, la

[104] El método de Euclides para hallar el *m. c. m.* de tres números nos es familiar. Primero se halla el *m. c. m.* de *a, b*, sea *d*; y después se halla el *m. c. m.* de *d* y *c*

unidad Δ mide al número Γ el mismo número de veces que B a Δ. Así pues, por alternancia, la unidad Δ mide al número B el mismo número de veces que Γ a A [VII, 15]; entonces la parte que la unidad Δ es del número B, la misma parte es también Γ de A. Pero la unidad Δ es una parte del número B homónima de él; entonces Γ es también una parte de A homónima de B. De modo que A tiene una parte Γ que es homónima de B. Q. E. D.[105].

PROPOSICIÓN 38

Si un número tiene una parte cualquiera, será medido por un número homónimo de la parte.

Tenga, pues, el número A una parte cualquiera B, y sea Γ homónimo de la parte B.

Digo que Γ mide a A.

Pues como B es una parte de A homónima de Γ, y la unidad Δ es una parte de Γ homónima de él, entonces la parte que la unidad Δ es del número Γ, la misma parte es también B de A; entonces la unidad Δ mide al número Γ el mismo número de veces que B a A. Así pues, por alternancia, la unidad Δ mide al número B el mismo número de veces que Γ a A [VII, 15].

Por consiguiente, Γ mide a A. Q. E. D.

[105] El texto del enunciado precisa de una explicación. Por ejemplo, si *3* mide a *A*, es decir: Si $A = 3m = (3+3+...3)$, la proposición afirma que hay un número que es un *tercio* de *A*.

Si *B* mide a *A*, existe un número que es la B^{ava} parte de *A*.

Proposición 39

Hallar un número que sea el menor que tenga unas partes dadas.

Sean las partes dadas A, B, Γ.

Así pues, hay que hallar un número que sea el menor que tenga las partes A, B, Γ.

Pues sean Δ, E, Z números homónimos de las partes A, B, Γ; y tómese H, el menor (número) medido por Δ, E, Z [VII, 36].

Entonces, H tiene partes homónimas de Δ, E, Z [VII, 37]. Pero A, B, Γ son partes homónimas de Δ, E, Z, Γ; entonces tiene las partes A, B, Γ.

Digo además que es también el menor.

Pues, si no, habrá un número menor que H que tenga las partes A, B, Γ. Sea Θ. Puesto que Θ tiene las partes A, B, Γ, entonces Θ será medido por los números homónimos de las partes A, B, Γ [VII, 38]. Pero Δ, E, Z son números homónimos de las partes A, B, Γ; entonces Θ es medido por los (números) Δ, E, Z. Y es menor que H; lo cual es imposible.

Por consiguiente, no habrá ningún número menor que H que tenga las partes A, B, Γ. Q. E. D.

LIBRO OCTAVO

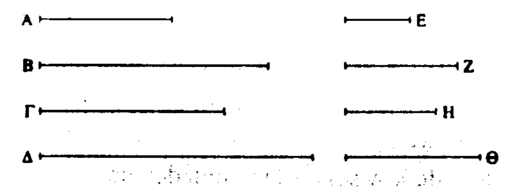
Proposición 1

Si tantos números como se quiera son continuamente[106] *proporcionales y sus extremos son primos entre sí, son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.*

Sean A, B, Γ, Δ tantos números como se quiera continuamente proporcionales, y sean primos entre sí sus extremos A, Δ.

Digo que A, B, Γ, Δ son los menores de los que guardan la misma razón que ellos.

Pues, si no, sean E, Z, H, Θ menores que A, B, Γ, Δ, guardando la misma razón que ellos. Y puesto que A, B, Γ, Δ



guardan la misma razón que E, Z, H, Θ y la cantidad de los (números) A, B, Γ, Δ es igual a la cantidad de los (números)

---

[106] La expresión utilizada aquí es *hexês análogon*. Se trata de lo que nosotros llamaríamos «progresión geométrica».

E, Z, H, Θ, entonces, por igualdad, como A es a Δ, E a Θ [VII, 14]. Pero A, Δ son primos, y los primos son los menores [VII, 21], y los números menores miden a los que guardan la misma razón que ellos el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor, es decir: el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]. Entonces, A mide a E, el mayor al menor; lo cual es imposible. Luego, E, Z, H, Θ, que son menores que A, B, Γ, Δ no guardan la misma razón que ellos. Por consiguiente, A, B, Γ, Δ son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos. Q. E. D.

Proposición 2

Hallar tantos números como uno proponga continuamente proporcionales, los menores en una razón dada.

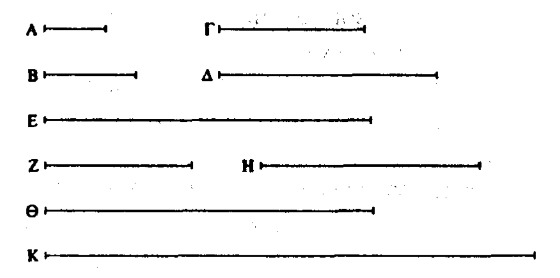
Sea la razón de A a B la razón dada en sus menores números.

Así pues, hay que hallar tantos números como uno proponga continuamente proporcionales, los menores en la razón de A a B.

Sean cuatro los propuestos, y A, al multiplicarse por sí mismo, haga el (número) Γ, y al multiplicar a B, haga el (número) Δ, y además B, al multiplicarse por sí mismo, haga el número E y además A, al multiplicar a Γ, Δ, E, haga los (números) Z, H, Θ, y B, al multiplicar a E, haga el (número) K.

Y puesto que A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) Γ y, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Δ, entonces, como A es a B, así Γ a Δ [VII, 17]. Puesto que A, al

multiplicar a B, ha hecho a su vez el (número) Δ, mientras que B, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) E, entonces, cada uno de los (números) A, B, al multiplicar a



B, han hecho los (números) Δ, E respectivamente. Por tanto, como A es a B, así Δ a E [VII, 18]. Pero como A es a B, Γ es a Δ; entonces también como Γ es a Δ, Δ es a E. Y puesto que A, al multiplicar a Γ, Δ, ha hecho los (números) Z, H, entonces, como Γ es a Δ, Z es a H [VII, 17]. Pero como Γ es a Δ, así A era a B; luego también como A es a B, Z es a H. Puesto que A, al multiplicar a Δ, E, ha hecho a su vez (los números) H, Θ, entonces, como Δ es a E, H es a Θ [VII, 17]. Pero como Δ es a E, A es a B. Por tanto, también como A es a B, así H a Θ. Y puesto que A, B, al multiplicar a E han hecho los (números) Θ, K, entonces, como A es a B, así Θ a K [VII, 18]. Pero como A es a B, así Z a H, y H a Θ. Por tanto, también, como Z es a H, así H a Θ y Θ a K; luego Γ, Δ, E y Z, H, Θ, K son proporcionales en la razón de A a B.

Digo además que también son los menores. Pues como A, B son los menores de los que guardan la misma razón que ellos, y los menores de los que guardan la misma razón son primos entre sí [VII, 22], entonces A, B son primos entre sí. Y cada uno de los (números) A, B, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho los números Γ, E respectivamente, mien-

tras que, al multiplicar a los (números) Γ, Ε, ha hecho los (números) Ζ, Κ respectivamente; entonces Γ, Ε y Ζ, Κ son primos entre sí [VII, 27]. Pero si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales y sus extremos son primos entre sí, son los menores de los que guardan la misma razón que ellos [VIII, 1].

Por consiguiente, Γ, Δ, Ε y Ζ, Η, Θ, Κ son los menores de los que guardan la misma razón que Α, Β. Q. E. D.

Porisma:

A partir de esto queda claro que si tres números continuamente proporcionales son los menores de los que guardan la misma razón con ellos, sus extremos son cuadrados y, si son cuatro, cubos.

Proposición 3

Si tantos números como se quiera continuamente proporcionales son los menores de los que guardan la misma razón que ellos, sus extremos son primos entre sí.

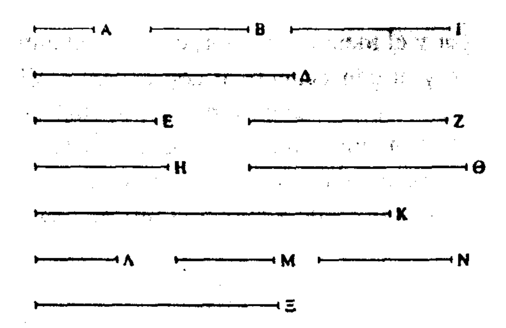
Sean Α, Β, Γ, Δ tantos números como se quiera continuamente proporcionales y los menores de los que guardan la misma razón que ellos.

Digo que sus extremos, Α, Δ, son primos entre sí.

Tómense, pues, dos números Ε, Ζ los menores en la razón de Α, Β, Γ, Δ [VII, 33], y otros tres Η, Θ, Κ, y así sucesivamente aumentando la serie de uno en uno [VIII, 2] hasta que la cantidad (de números) tomada resulte igual a la cantidad de los (números) Α, Β, Γ, Δ. Tómense y sean Λ, Μ, Ν, Ξ.

Y puesto que Ε, Ζ son los menores de los que guardan la misma razón que ellos, son primos entre sí [VII, 22]. Ahora

bien, como cada uno de los (números) E, Z, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho los (números) H, K, respectivamente, mientras que al multiplicar a H, K, ha hecho los números Λ,



Ξ respectivamente, entonces, H, K y Λ, Ξ son primos entre sí [VII, 27]. Y como A, B, Γ, Δ son los menores de los que guardan la misma razón con ellos, pero Λ, M, N, Ξ son también los menores que guardan la misma razón con A, B, Γ, Δ, y la cantidad de los (números) A, B, Γ, Δ es igual a la cantidad de los (números) Λ, M, N, Ξ, entonces, los (números) A, B, Γ, Δ son iguales respectivamente a los (números) Λ, M, N, Ξ; por tanto, A es igual a Λ y Δ a Ξ. Pero Λ, Ξ son primos entre sí.

Por consiguiente, A, Δ también son primos entre sí. Q. E. D.

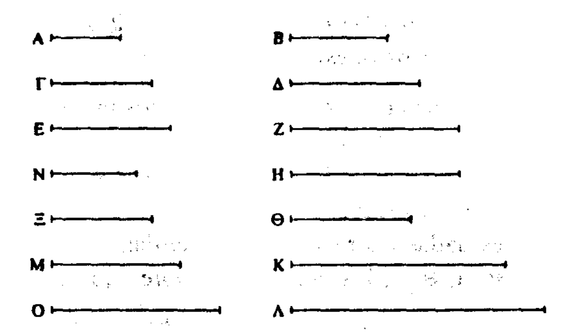
Proposición 4

Dadas tantas razones como se quiera en sus menores números, hallar los números continuamente proporcionales menores en las razones dadas.

Sean las razones dadas en sus menores números la de A a B y la de Γ a Δ y además la de E a Z.

Así pues, hay que hallar los números continuamente proporcionales menores en la razón de A a B, en la de Γ a Δ y en la de E a Z.

Pues tómese H, el menor número medido por B, Γ [VII, 34]. Y cuantas veces B mide a H, tantas mida también A a Θ,

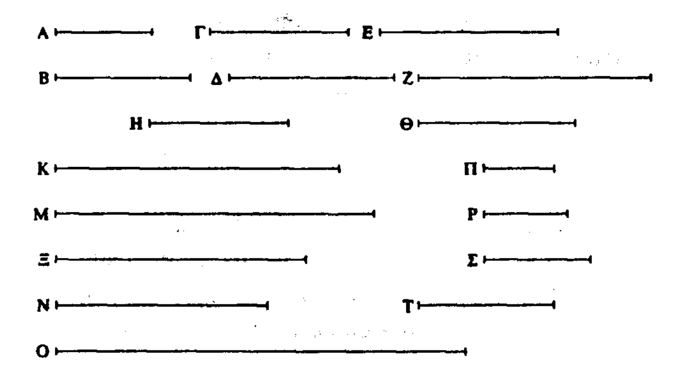


y cuantas veces Γ mide a H, tantas mida también Δ a K. Ahora bien, E o mide a K o no lo mide. En primer lugar, mídalo. Y cuantas veces E mide a K, tantas mida también Z a Λ. Y como A mide a Θ el mismo número de veces que B a H, entonces como A es a B, así Θ a H [VII, Def. 21 y VII, 13]. Por lo mismo, también como Γ es a Δ, así H a K, y además, como E es a Z, así K a Λ; por tanto, Θ, H, K, Λ son continuamente proporcionales en la razón de A a B y también en la de Γ a Δ y además en la de E a Z.

Digo además que también son los menores (con esta propiedad).

Pues si Θ, H, K, Λ no son los (números) continuamente proporcionales menores en las razones de A a B, de Γ a Δ y de E a Z, séanlo entonces N, Ξ, M, O. Ahora bien, puesto que como A es a B, así N a Ξ, mientras que A, B son los menores y los menores miden a los que guardan la misma razón que ellos el mismo número de veces el mayor al mayor y el me-

nor al menor, es decir: el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente, entonces B mide a Ξ [VII, 20]: por lo mismo, Γ también mide a Ξ; por tanto, B, Γ miden a Ξ; luego el menor medido por B, Γ medirá también a Ξ [VII, 35]; pero H es el menor medido por B, Γ: entonces H mide a Ξ, el mayor al menor; lo cual es imposible. Así pues, no habrá algunos números menores que Θ, H, K, Λ que estén con-



tinuamente en la razón de A a B, ni en la de Γ a Δ, ni tampoco en la de E a Z.

Ahora no mida E a K. Y tómese M, el menor número medido por E, K. Y cuantas veces K mide a M, tantas veces mida Θ, H a N, Ξ respectivamente y cuantas veces E mide a M, tantas mida también Z a O. Como Θ mide a N el mismo número de veces que H a Ξ, entonces como Θ es a H, así N a Ξ [VII, 13 y def. 21]. Pero como Θ es a H, así A a B. Entonces como A es a B, así N a Ξ. Por lo mismo, también como Γ es a Δ, así Ξ a M. A su vez, como E mide a M el mismo número de veces que Z a O, entonces, como E es a Z, así M a O [VII, 13, y Def. 21]; por tanto, N, Ξ, M, O son continuamente proporcionales en las razones de A a B, de Γ a Δ y de E a Z.

Digo además que también son los menores en las razones AB, ΓΔ, EZ. Pues, si no, habrá algunos números menores que N, Ξ, M, O continuamente proporcionales en las razones AB, ΓΔ, EZ. Sean Π, P, Σ, T. Y puesto que como Π es a P, así A a B, mientras que A, B son los menores y los menores miden a los que guardan la misma razón que ellos el mismo número de veces, el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20], entonces B mide a P. Por lo mismo, Γ también mide a P, por tanto, B, Γ miden a P. Luego el menor medido por B, Γ medirá también a P. Pero H es el menor medido por B, Γ; entonces H mide a P. Y como H es a P, así K a Σ [VII, 13]; entonces K mide a Σ. Pero también E mide a Σ, luego E, K miden a Σ. Por tanto, el menor medido por E, K medirá a Σ. Pero el menor medido por E, K es M; luego M mide a Σ, el mayor al menor; lo cual es imposible. Entonces, no habrá algunos números menores que N, Ξ, M, O continuamente proporcionales en las razones de A a B, de Γ a Δ y de E a Z.

Por consiguiente, N, Ξ, M, O son los números continuamente proporcionales menores en las razones AB, ΓΔ, EZ. Q. E. D.[107].

[107] Euclides utiliza aquí las expresiones abreviadas: «las razones AB, ΓΔ, EZ» para las razones de A a B de Γ a Δ y de E a Z. Por otra parte, «continuamente proporcionales» no se utiliza aquí en el sentido habitual de progresión geométrica, sino que se aplica a una serie de términos cada uno de los cuales guarda con el siguiente una razón determinada pero no la misma razón.

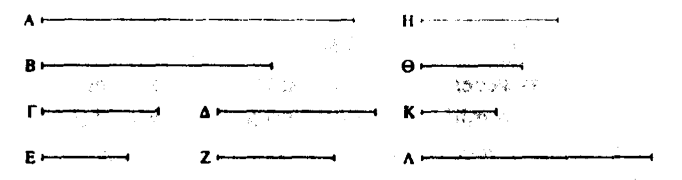
PROPOSICIÓN 5

Los números planos guardan entre sí la razón compuesta de (las razones) de sus lados[108].

Sean A, B números planos y sean los números Γ, Δ los lados de A, y E, Z los de B.

Digo que A guarda con B una razón compuesta de (las razones) de sus lados.

Pues dadas las razones que guardan Γ con E y Δ con Z, tómense H, Θ, K, los números menores que están continua-



mente en las razones ΓE, ΔZ, de modo que como Γ es a E, así H a Θ y como Δ es a Z, así Θ a K [VIII, 4] y Δ, al multiplicar a E, haga el (número) Λ.

Y puesto que Δ, al multiplicar a Γ, ha hecho el (número) A, mientras que al multiplicar a E ha hecho el (número) Λ, entonces, como Γ es a E, así A a Λ [VII, 17]. Pero como Γ es a E, así H a Θ; entonces, también, como H es a Θ, así A a Λ. Puesto que E a su vez, al multiplicar a Δ, ha hecho el (número) Λ, mientras que, al multiplicar también a Z, ha hecho el (número) B, entonces, como Δ es a Z, así Λ a B [VII, 17]. Pero como Δ es a Z, así Θ a K; luego, también, como Θ es a

[108] Como en VI 23, el texto tiene la expresión menos exacta *synkeímenon ek tôn pleurôn*.

K, así Λ a B. Pero se ha demostrado también que como H es a Θ, así A a Λ; entonces, por igualdad, como H es a K, A es a B [VII, 14], pero H guarda con K la razón compuesta de las (razones) de sus lados.

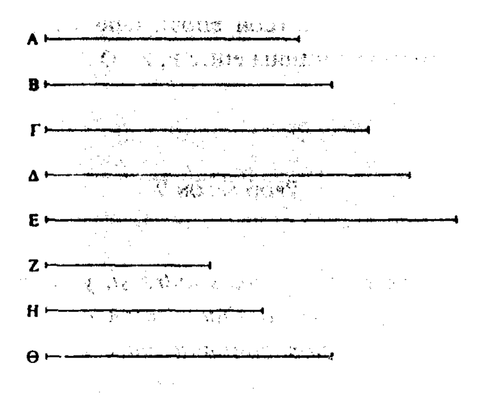
Por consiguiente, A guarda con B la razón compuesta a partir de las (razones) de sus lados. Q. E. D.

Proposición 6

Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales y el primero no mide al segundo, tampoco ningún otro medirá a ninguno.

Sean A, B, Γ, Δ, E tantos números como se quiera continuamente proporcionales y A no mida a B.

Digo que tampoco ningún otro medirá a ningún otro.



Está claro que A, B, Γ, Δ, E no se miden sucesivamente entre sí, pues ni siquiera A mide a B.

Digo además que ningún otro medirá a ninguno.

Pues, de ser posible, mida A a Γ. Y, cuantos números sean A, B, Γ, tómense tantos números Z, H, Θ, los menores de los que guardan la misma razón que A, B, Γ [VII, 33].

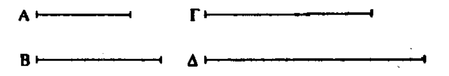
Y puesto que Z, H, Θ guardan la misma razón que A, B, Γ, y la cantidad de los (números) A, B, Γ, es igual a la cantidad de los (números) Z, H, Θ, entonces, por igualdad, como A es a Γ, así Z a Θ [VII, 14]. Ahora bien, dado que como A es a B, así Z a H, y A no mide a B, entonces tampoco Z mide a H [VII, Def. 21]; por tanto, Z no es una unidad; pues la unidad mide a cualquier número. Y Z, Θ son primos entre sí [VIII, 3]. Por tanto, como Z es a Θ, así A a Γ.

Por consiguiente, A tampoco mide a Γ. De manera semejante demostraríamos que ningún otro mide tampoco a ningún otro. Q. E. D.

Proposición 7

Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales y el primero mide al último, también medirá al segundo.

Sean A, B, Γ, Δ tantos números como se quiera continuamente proporcionales y mida A a Δ.



Digo que A también mide a B.

Pues, si A no mide a B, tampoco ningún otro medirá a ningún otro [VIII, 6]. Pero A mide a Δ.

Por consiguiente, A mide también a B. Q. E. D.

Proposición 8

Si entre dos números caen números en proporción continua (con ellos), entonces cuantos números caen entre ellos en proporción continua, tantos caerán también en proporción continua entre los que guardan la misma razón (con los números iniciales)[109].

Pues caigan los números Γ, Δ entre los dos números A, B en proporción continua (con ellos) y hágase que como A es a B, así E sea a Z.

Digo que cuantos números hayan caído entre los (números) A, B en proporción continua, tantos caerán también entre los (números) E, Z en proporción continua.

Pues cuantos sean A, B, Γ, Δ, tómense tantos números, H, Θ, K, Λ, los menores de los que guardan la misma razón que A, Γ, Δ, B [VII, 33]; entonces, sus extremos H, Λ son primos entre sí [VIII, 3]. Y como A, Γ, Δ, B guardan la misma razón que H, Θ, K, Λ, y la cantidad de los (números) A, Γ, Δ, B es

[109] *Empíptō* «caer entre», «intercalar».

La expresión utilizada aquí para la proporción continua es *katà tò synechès análogon*. Para diferenciarla de *hexês análogon*, traduzco aquí «en proporción continua» en lugar de «continuamente proporcionales».

igual a la cantidad de los (números) H, Θ, K, Λ, entonces, por igualdad, como A es a B, así H a Λ [VII, 14]. Pero como A es a B, así E a Z; luego también, como H es a Λ, así E a Z. Pero H, Λ son primos y los primos son también los menores [VII, 21], y los números menores miden a los que guardan la misma razón que ellos el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor, es decir: el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]. Así pues, H mide a E el mismo número de veces que Λ a Z. Ahora, cuantas veces H mide a E, tantas veces midan Θ, K a M, N respectivamente; entonces H, Θ, K, Λ miden a E, M, N, Z el mismo número de veces. Por tanto, H, Θ, K, Λ guardan la misma razón que E, M, N, Z [VII, Def. 21]. Pero H, Θ, K, Λ guardan la misma razón que A, Γ, Δ, B; y A, Γ, Δ, B guardan la misma razón que E, M, N, Z; pero A, Γ, Δ, B están en proporción continua; por tanto, E, M, N, Z están en proporción continua.

Por consiguiente, cuantos números han caído entre A, B en proporción continua (con ellos), tantos han caído también en proporción continua entre E, Z. Q. E. D.

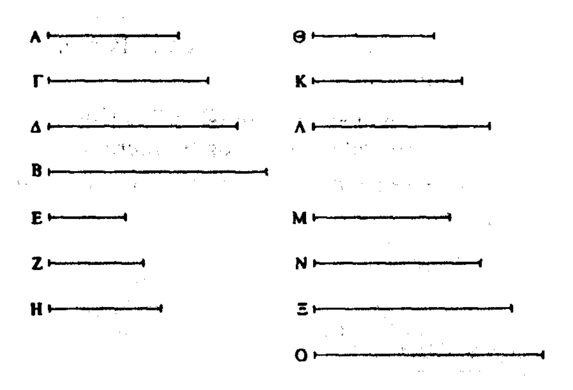
Proposición 9

Si dos números son primos entre sí, y caen entre ellos números en proporción continua, entonces, cuantos números caen en proporción continua entre ellos, tantos caerán también en proporción continua entre cada uno de ellos y la unidad.

Sean A, B dos números primos entre sí y caigan entre ellos Γ, Δ en proporción continua, y quede aparte la unidad E.

Digo que, cuantos números hayan caído entre A, B en proporción continua, tantos caerán también en proporción continua entre cada uno de ellos y la unidad.

Pues tómense dos números Z, H, los menores que están en la razón de A, Γ, Δ, B, y tres (números) Θ, K, Λ, y así suce-



sivamente aumentando la serie de uno en uno, hasta que resulte igual su cantidad a la cantidad de los (números) A, Γ, Δ, B [VIII, 2]. Tómense y sean M, N, Ξ, O. Pues bien, está claro que Z, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) Θ, y, al multiplicar a Θ, ha hecho el (número) M, mientras que H, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) Λ y, al multiplicar a Λ, ha hecho el (número) O [VIII, 2, Por.].

Ahora bien, puesto que M, N, Ξ, O son los menores de los que guardan la misma razón que Z, H, y A, Γ, Δ, B son también los menores de los que guardan la misma razón que Z, H [VIII, 1], mientras que la cantidad de los (números) M, N,

Ξ, O es igual a la cantidad de los (números) A, Γ, Δ, B, entonces los (números) M, N, Ξ, O son iguales a los (números) A, Γ, Δ, B respectivamente; por tanto, M es igual a A y O a B. Y como Z, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) Θ, entonces Z mide a Θ según las unidades de Z. Pero la unidad E mide también a Θ según sus unidades; luego, la unidad E mide al número Z el mismo número de veces que Z a Θ. Por tanto, como la unidad E es al número Z, así Z a Θ [VII, Def. 21]. Puesto que, a su vez, Z, al multiplicar a Θ, ha hecho el (número) M, entonces, Θ mide a M según las unidades de Z. Pero la unidad E mide también al número Z según sus unidades; luego la unidad E mide al número Z el mismo número de veces que Θ a M. Por tanto, como la unidad E es al número Z, así Θ a M. Luego la unidad E es al número Z como Θ a M. Pero se ha demostrado también que como la unidad E es al número Z, así Z a Θ. Entonces como la unidad E es al número Z, así es Z a Θ y Θ a M. Pero M es igual a A; por tanto, como la unidad E es al número Z, así es Z a Θ y Θ a A. Por lo mismo también, como la unidad E es al número H, así H a Λ y Λ a B.

Por consiguiente, cuantos números han caído en proporción continua entre A, B, tantos números han caído también en proporción continua entre cada uno de los (números) A, B y la unidad E. Q. E. D.

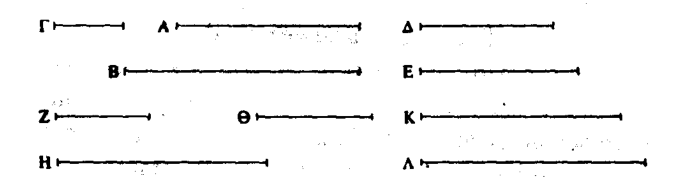
Proposición 10

Si entre cada uno de dos números y una unidad caen números en proporción continua, entonces, cuantos números caigan en proporción continua entre cada uno de ellos y la unidad, tantos caerán también en proporción continua entre ellos.

Caigan entre los números A, B y la unidad Γ los números Δ, E y los (números) H, Z en proporción continua.

Digo que cuantos números hayan caído entre cada uno de los números A, B y la unidad Γ en proporción continua, tantos caerán también en proporción continua entre A, B.

Pues Δ, al multiplicar a Z, haga el (número) Θ, y Δ, Z, al multiplicar a Θ, hagan los (números) K, Λ respectivamente.



Puesto que como la unidad Γ es al número Δ, así Δ es a E, entonces la unidad Γ mide al número Δ el mismo número de veces que Δ a E [VII, 20 y Def. 21]. Pero la unidad Γ mide al número Δ según las unidades de Δ; por tanto, el número Δ también mide a E según las unidades de Δ; luego Δ, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) E. Asimismo, puesto que como Γ es al número Δ, así E es a A, entonces la unidad Γ mide al número Δ el mismo número de veces que E a A. Pero la unidad Γ mide al número Δ según las unidades de Δ; entonces E mide a A según las unidades de Δ; entonces Δ, al multiplicar a E, ha hecho el (número) A. Por lo mismo, también Z, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) H y, al multiplicar a H, ha hecho el (número) B.

Y puesto que Δ, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho E y al multiplicar a Z ha hecho Θ, entonces como Δ es a Z, así E a Θ [VII, 17]. Por lo mismo, también como Δ es a Z, así Θ a H [VII, 18]. Entonces, también, como E es a Θ, así Θ a H. Puesto que a su vez Δ, al multiplicar a los (números) E, Θ, ha hecho los (números) A, K respectivamente, entonces, como E

es a Θ, así A a K [VII, 17]. Pero como E es a Θ, así Δ a Z; entonces, como Δ es a Z, así A a K. Puesto que a su vez Δ, Z, al multiplicar a Θ, han hecho los (números) K, Λ respectivamente, entonces, como Δ es a Z, así K a Λ [VII, 18]. Pero como Δ es a Z, así A a K; por tanto, como A es a K, así K a Λ. Además, puesto que Z, al multiplicar a los (números) Θ, H, ha hecho los (números) Λ, B respectivamente, entonces, como Θ es a H, así Λ a B [VII, 17]. Pero, como Θ es a H, así Δ a Z. Entonces, como Δ es a Z, así Λ a B. Pero se ha demostrado que también como Δ es a Z, así A a K y K a Λ; así pues, también, como A es a K, así K a Λ y Λ a B. Por tanto, A, K, Λ, B están en proporción continua.

Por consiguiente, cuantos números han caído en proporción continua entre cada uno de los (números) A, B y la unidad Γ, tantos caerán también en proporción continua entre A, B. Q. E. D.[110].

Proposición 11

Entre dos números cuadrados hay un número (que es) media proporcional y el número cuadrado guarda con el número cuadrado una razón duplicada de la que el lado guarda con el lado.

Sean A, B los números cuadrados y sea Γ el lado de A y Δ el de B.

[110] Se observará que con la expresión «por lo mismo, también como Δ es a Z, así Θ a H», Euclides hace referencia, en realidad, a VII 18, y no a VII 17, pero, como el orden de factores no altera el producto, las palabras «por lo mismo, también» están justificadas aquí. Lo mismo ocurre en la proposición siguiente.

Digo que hay un número (que es) media proporcional entre A y B, y que A guarda con B una razón duplicada de la que Γ guarda con Δ.

Pues Γ, al multiplicar a Δ, haga el (número) E. Y puesto que A es un (número) cuadrado y Γ es su lado, entonces Γ, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) A. Por lo mismo, Δ, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) B. Así pues, como Γ, al multiplicar a los números Γ, Δ, ha hecho los números A, E respectivamente, entonces, como Γ es a Δ, así A a E [VII, 17]. Por lo mismo, también, como Γ es a Δ, así E a B [VII, 18]. Luego también, como A es a E, así E a B. Por tanto, entre A, B hay un número media proporcional.

Digo además que A guarda con B una razón duplicada de la que Γ guarda con Δ.

Pues como A, E, B son tres números en proporción, entonces A guarda con B una razón duplicada de la que A guarda con E [V, Def. 9]. Pero como A es a E, así Γ a Δ. Por consiguiente, A guarda con B una razón duplicada de la que Γ guarda con Δ. Q. E. D.[111].

---

[111] Según Nicómaco, este teorema y el siguiente, a saber: que entre dos cuadrados hay una media geométrica, se deben a Platón. Cf. *Timeo* 32a ss.: «Si el cuerpo del Universo hubiera tenido que ser una superficie sin profundidad, habría bastado con una magnitud media que se uniera a sí misma con los extremos; pero, en realidad, convenía que fuera sólido, y los sólidos nunca son conectados por un término medio, sino siempre por dos». Lo más que cabría decir es que tales resultados le eran familiares.

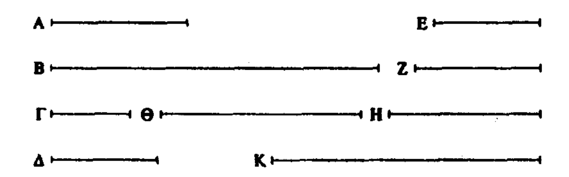
PROPOSICIÓN 12

Entre dos números cubos hay dos números (que son) medias proporcionales y el (número) cubo guarda con el (número) cubo una razón triplicada de la que el lado guarda con el lado.

Sean A, B dos números cubos y sea Γ el lado de A y Δ el de B.

Digo que entre A, B hay dos números (que son) medias proporcionales y que A guarda con B una razón triplicada de la que Γ guarda con Δ.

Pues Γ, al multiplicarse por sí mismo, haga el (número) E, y, al multiplicar a Δ, haga el (número) Z, y Δ, al multipli-



carse por sí mismo, haga el (número) H, y Γ, Δ, al multiplicar a Z, hagan los (números) Θ, K respectivamente.

Y puesto que A es un (número) cubo y Γ es su lado, y Γ, al multiplicarse a sí mismo, ha hecho el (número) E, entonces Γ, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) E y, al multiplicar a E, ha hecho A. Por lo mismo, también Δ, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho H, y, al multiplicar a H, ha hecho B. Ahora bien, puesto que Γ, al multiplicar a los (números) Γ, Δ, ha hecho los (números) E, Z respectivamente, entonces como Γ es a Δ, así E a Z [VII, 17]. Por lo mismo,

también, como Γ es a Δ, así Z a H [VII, 18]. A su vez, puesto que Γ, al multiplicar a los (números) E, Z, ha hecho A, Θ respectivamente, entonces, como E es a Z, así A a Θ [VII, 17]. Pero como E es a Z, así Γ a Δ; entonces como Γ es a Δ, así A a Θ. Puesto que, a su vez, los (números) Γ, Δ, al multiplicar a Z, han hecho los (números) Θ, K respectivamente, entonces, como Γ es a Δ, así Θ es a K [VII, 18]. Puesto que, a su vez, Δ, al multiplicar a los (números) Z, H, ha hecho K, B respectivamente, entonces, como Z es a H, así K a B [VII, 17]. Pero como Z es a H, así Γ a Δ; entonces, también, como Γ es a Δ, así A a Θ, Θ a K y K a B. Por tanto, entre A, B hay dos números medios proporcionales Θ, K.

Digo además que A guarda con B una razón triplicada de la que Γ guarda con Δ. Pues como A, Θ, K, B son cuatro números en proporción, entonces A guarda con B una razón triplicada de la que A guarda con Θ [V, Def. 10]. Pero como A es a Θ, así Γ a Δ.

Y, por consiguiente, A guarda con B una razón triplicada de la que Γ guarda con Δ. Q. E. D.

Proposición 13

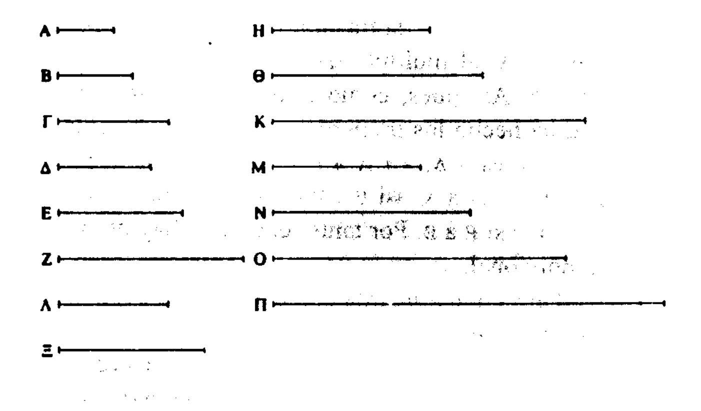
Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales y cada uno, al multiplicarse por sí mismo, hace algún (número), los productos serán proporcionales; y, si los (números) iniciales, al multiplicar a los productos, hacen ciertos (números), también estos últimos serán proporcionales.

Sean A, B, Γ tantos números como se quiera continuamente proporcionales, (es decir que) como A es a B, así B a

Γ; y A, B, Γ, al multiplicarse por sí mismos, hagan los (números) Δ, E, Z, y Δ, E, Z, al multiplicarse a sí mismos, hagan los (números) H, Θ, K.

Digo que Δ, E, Z y H, Θ, K son continuamente proporcionales.

Haga, pues, A, al multiplicar a B, el (número) Λ, y A, B, al multiplicar a Λ, hagan los (números) M, N respectivamente.



mente. Y B, al multiplicar a su vez a Γ, haga Ξ, y B, Γ, al multiplicar a Ξ, hagan los (números) O, Π respectivamente.

Así pues, de manera semejante a lo anterior demostraríamos que Δ, Λ, E y H, M, N, Θ son continuamente proporcionales en la razón de A a B, y además E, Ξ, Z y Θ, O, Π, K son continuamente proporcionales en la razón de B a Γ. Ahora bien, como A es a B, así B a Γ; entonces Δ, Λ, E guardan la misma razón que E, Ξ, Θ y además H, M, N, Θ (guardan la misma razón) que Θ, O, Π, K. Y la cantidad de los (números) Δ, Λ, E es (igual) a la cantidad de los (números) E, Ξ, Z y la de H, M, N, Θ igual a la de Θ, O, Π, K.

Por consiguiente, por igualdad, como Δ es a E, así E a Z, y como H es a Θ, así Θ a K [VII, 14]. Q. E. D.

Proposición 14

Si un (número) cuadrado mide a un (número) cuadrado, también el lado medirá al lado; y, si el lado mide al lado, el (número) cuadrado medirá también al (número) cuadrado.

Sean A, B números cuadrados y sean sus lados Γ, Δ y mida A a B.

Digo que Γ mide también a Δ.

Pues Γ, al multiplicar a Δ, haga el (número) E; entonces A, E, B son continuamente proporcionales en la razón de Γ a Δ [VIII, 11]. Y puesto que A, E, B son continuamente proporcionales y A mide a B, entonces A mide también a E [VIII, 7]. Y como A es a E, así Γ a Δ; entonces Γ mide a Δ [VII, Def. 21].

Ahora mida Γ a su vez a Δ.

Digo que A también mide a B.

Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de manera semejante que A, E, B son continuamente proporcionales en la razón de Γ a Δ. Y puesto que, como Γ es a Δ, así A a E, pero Γ mide a Δ, entonces, A mide a E [VII, Def. 21]. Y A, E, B son continuamente proporcionales; luego A mide a B.

Por consiguiente, si un (número) cuadrado mide a un (número) cuadrado, también el lado medirá al lado; y, si el

lado mide al lado, también el (número) cuadrado medirá al número cuadrado. Q. E. D.[112].

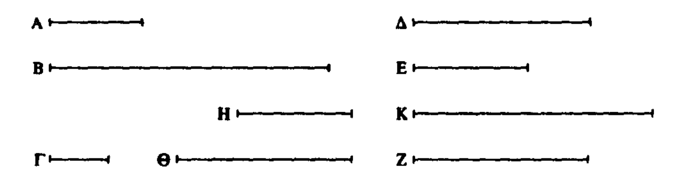
Proposición 15

Si un número cubo mide a un número cubo, también el lado medirá al lado; y si el lado mide al lado, también el cubo medirá al cubo.

Pues mida el número cubo A al (número) cubo B, y sea Γ el lado de A y Δ el de B.

Digo que Γ mide a Δ.

Pues Γ, al multiplicarse por sí mismo, haga el (número) E, y Δ, al multiplicarse por sí mismo, haga el (número) H y



además Γ, al multiplicar a Δ, haga el (número) Z, y Γ, Δ, al multiplicar a Z, hagan los (números) Θ, K respectivamente. Pues bien, está claro que E, Z, H y A, Θ, K, B son continuamente proporcionales en la razón de Γ a Δ [VIII, 11 y 12]. Y puesto que A, Θ, K, B son continuamente proporcionales y A mide a B, entonces también mide a Θ [VIII, 7]. Ahora bien, como A es a Θ, así Γ a Δ. Entonces Γ también mide a Δ [VII, Def. 21].

[112] Es uno de los raros casos en los teoremas de aritmética cuya conclusión reitera el enunciado de la proposición. Cf. VII 31-32.

Pero ahora mida Γ a Δ.

Digo que también A medirá a B.

Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de modo semejante que A, Θ, K, B son continuamente proporcionales en la razón de Γ a Δ. Y puesto que Γ mide a Δ y como Γ es a Δ, así A a Θ, entonces A mide también a Θ [VII, Def. 21]; de modo que B mide también a A. Q. E. D.

Proposición 16

Si un número cuadrado no mide a un número cuadrado, tampoco el lado medirá al lado; y si el lado no mide al lado, tampoco el (número) cuadrado medirá al (número) cuadrado.

Sean los números cuadrados A, B y sean sus lados Γ, Δ y no mida A a B.

Digo que Γ tampoco mide a Δ.

A

B

Γ

Δ

Pues, si Γ mide a Δ, A medirá también a B [VIII, 14]. Pero A no mide a B; luego Γ tampoco medirá a Δ.

Ahora bien, no mida Γ a Δ.

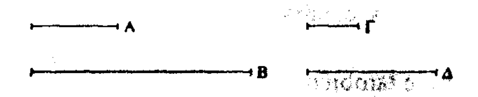
Digo que A tampoco medirá a B.

Pues, si A mide a B, Γ medirá también a Δ [VIII, 14]. Pero Γ no mide a Δ; luego A tampoco medirá a B. Q. E. D.

Proposición 17

Si un número cubo no mide a un número cubo, el lado tampoco medirá al lado; y si el lado no mide al lado, tampoco el (número) cubo medirá al (número) cubo.

Pues que no mida el número cubo A al número cubo B; y sea Γ el lado de A y Δ el de B.



Digo que Γ no medirá a Δ.

Pues, si Γ mide a Δ, A también medirá a B [VIII, 15]. Pero A no mide a B; luego Γ no mide a Δ.

Ahora bien, no mida Γ a Δ.

Digo que A tampoco medirá a B.

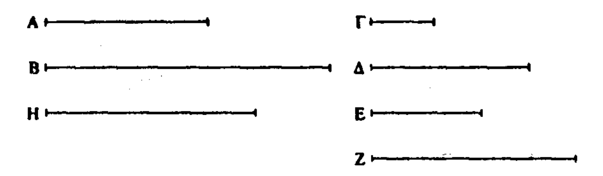
Pues si A mide a B, Γ medirá también a Δ [VIII, 15].

Pero Γ no mide a Δ; luego A no medirá a B. Q. E. D.

Proposición 18

Entre dos números planos semejantes hay un número (que es) media proporcional; y el (número) plano guarda con el (número) plano una razón duplicada de la que el lado correspondiente guarda con el lado correspondiente.

Sean A, B dos números planos semejantes, y sean los números Γ, Δ los lados de A, y E, Z los de B. Y puesto que



(números) planos semejantes son los que tienen los lados proporcionales [VII, Def. 22], entonces como Γ es a Δ, así E a Z.

Pues bien, digo que entre A, B hay un número (que es la) media proporcional y A guarda con B una razón duplicada de la que Γ guarda con E o Δ con Z, es decir, de la que el lado correspondiente (guarda) con el lado correspondiente.

Y dado que como Γ es a Δ, así E a Z, entonces, por alternancia, como Γ es a E, así Δ a Z [VII, 13]. Ahora bien, como A es un número plano y Γ, Δ sus lados, entonces Δ, al multiplicar a Γ, ha hecho el número A. Por lo mismo, también E, al multiplicar a Z, ha hecho el (número) B.

Ahora Δ, al multiplicar a E, haga el (número) H. Y puesto que Δ, al multiplicar a Γ, ha hecho el (número) A, y al multiplicar a E, ha hecho el (número) H, entonces como Γ es a E, así A a H [VII, 17]. Pero como Γ es a E, así Δ es a Z; entonces como Δ es a Z, así A a H. Puesto que E, a su vez, al multiplicar a Δ ha hecho el (número) H, y al multiplicar a Z ha hecho el (número) B, entonces como Δ es a Z, así H a B [VII, 17]. Pero se ha demostrado también que como Δ es a Z, así A a H; entonces también, como A es a H, así H a B. Así pues, A, H, B son continuamente proporcionales. Luego entre A, B hay un número (que es la) media proporcional.

Digo ahora que A guarda con B una razón duplicada de la que el (lado) correspondiente (guarda) con el (lado) correspondiente, es decir, de la que Γ guarda con E o Δ con Z. Pues como A, H, B son continuamente proporcionales, A guarda con B una razón duplicada de la que (guarda) con H [V, Def. 9]. Y como A es a H, así Γ a E y Δ a Z.

Por consiguiente, A guarda con B una razón duplicada de la que Γ (guarda) con E o Δ con Z. Q. E. D.

Proposición 19

Entre dos números sólidos semejantes caen dos números (que son) medias proporcionales; y el (número) sólido guarda con el (número) sólido semejante una razón triplicada de la que el lado correspondiente guarda con el lado correspondiente.

Sean A, B dos (números) sólidos semejantes, y sean Γ, Δ, E los lados de A, y Z, H, Θ los de B. Y como sólidos semejantes son los que tienen los lados proporcionales [VII, Def. 22], entonces como Γ es a Δ, así Z a H, y como Δ es a E, así H a Θ.

Digo que entre A, B caen dos números (que son) medias proporcionales y que A guarda con B una razón triplicada de la que Γ (guarda) con Z y Δ con H y además E con Θ.

Pues haga Γ, al multiplicar a Δ, el (número) K, y haga Z, al multiplicar a H, el número Λ. Y como Γ, Δ están en la misma razón que Z, H y el (producto) de Γ, Δ es K, mientras que Λ es el (producto) de Z, H, entonces K, Λ son números planos semejantes [VII, Def. 22]; por tanto, entre K, Λ hay un número (que es) media proporcional [VIII, 18]. Sea M. Entonces M es el (producto) de Δ, Z, según se ha demostrado en el teorema anterior [VIII, 18]. Y puesto que Δ, al multiplicar a Γ, ha hecho el (número) K, y al multiplicar a Z ha hecho el (número) M, entonces, como Γ es a Z, así K a M [VII, 17]. Pero como K es a M, M es a Λ. Luego, K, M, Λ son continuamente proporcionales en la razón de Γ a Z. Puesto que, como Γ es a Δ, así Z a H, entonces, por alternancia, como Γ es a Z, así Δ a H [VII, 13]. Por lo mismo, también, como Δ es a H, así E a Θ. Así pues, K, M, Λ son continuamente proporcionales en la razón de Γ a Z y en la de Δ a H y además en la de E a Θ.

Ahora bien, hagan los (números) E, Θ, al multiplicar a M, los (números) N, Ξ respectivamente. Y puesto que A es un número sólido y Γ, Δ, E sus lados, entonces E, al multiplicar al producto de Γ, Δ, ha hecho el (número) A. Pero el (producto) de Γ, Δ es K; entonces E, al multiplicar a K, ha hecho A. Así que, también, por lo mismo, Θ, al multiplicar a Λ, ha hecho el (número) B.

Y puesto que E, al multiplicar a K, ha hecho el (número) A, mientras que, al multiplicar a M, ha hecho el (número) N, entonces, como K es a M, así A a N [VII, 17]. Pero, como K es a M, así Γ a Z y Δ a H y además E a Θ. Entonces también, como Γ es a Z y Δ a H y E a Θ, así A a N. Puesto que, a su vez, E, Θ, al multiplicar a M, han hecho los (números) N, Ξ res-

pectivamente, entonces, como E es a Θ, así N a Ξ [VII, 18]. Pero, como E es a Θ, así Γ a Z y Δ a H; luego también, como Γ es a Z y Δ a H y E a Θ, así A a N y N a Ξ. Puesto que Θ, a su vez, al multiplicar a M, ha hecho el (número) Ξ, mientras que, al multiplicar también a Λ, ha hecho el (número) B, entonces, como M es a Λ, así Ξ a B [VII, 17]. Pero como M es a Λ, así Γ a Z y Δ a H y E a Θ. Luego también, como Γ es a Z y Δ a H y E a Θ, así no sólo Ξ a B, sino también A a N y N a Ξ. Por tanto, A, N, Ξ, B son continuamente proporcionales en las antedichas razones de los lados.

Digo también que A guarda con B una razón triplicada de la que el lado correspondiente guarda con el lado correspondiente, es decir, de la que el número Γ (guarda) con el (número) Z, o el (número) Δ con el (número) H y además el (número) E con el (número) Θ.

Pues como A, N, Ξ, B son cuatro números continuamente proporcionales, entonces A guarda con B una razón triplicada de la que A (guarda) con N [V, Def. 10]. Pero se ha demostrado que como A es a N, así Γ a Z y Δ a H y además E a Θ.

Por consiguiente, también A guarda con B una razón triplicada de la que el lado correspondiente guarda con el lado correspondiente, es decir de la que el número Γ guarda con el (número) Z y el (número) Δ con el (número) H y además el (número) E con el (número) Θ. Q. E. D.

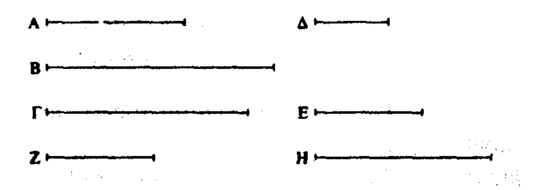
PROPOSICIÓN 20

Si entre dos números cae un número (que es) media proporcional, los números serán números planos semejantes.

Pues caiga un número Γ (que sea la) media proporcional entre los números A, B.

Digo que A, B son números planos semejantes.

Tómense los números menores Δ, E de los que guardan la misma razón con A, Γ [VII, 33]; entonces, Δ mide a A el



mismo número de veces que E a Γ [VII, 20]. Y cuantas veces Δ mida a A, tantas unidades haya en Z; entonces, Z, al multiplicar a Δ, ha hecho el (número) A. De modo que A es un número plano y Δ, Z sus lados. Puesto que a su vez Δ, E son los números menores de los que guardan la misma razón que Γ, B, entonces, Δ mide a Γ el mismo número de veces que E a B [VII, 20]. Ahora bien, cuantas veces E mida a B, tantas unidades haya en H. Entonces, E mide a B según las unidades de H; por tanto, H, al multiplicar a E, ha hecho el (número) B. Luego B es un número plano y E, H sus lados. Por tanto, A, B son números planos.

Digo además que son semejantes.

Pues como Z al multiplicar a Δ ha hecho el (número) A y al multiplicar a E ha hecho el (número) Γ, entonces, como Δ es a E, así A a Γ[113], es decir, Γ a B [VII, 17]. A su vez, puesto que E, al multiplicar a Z, H, ha hecho los (números) Γ, B respectivamente, entonces, como Z es a H, así Γ a B [VII, 17]. Pero como Γ es a B, así Δ a E; luego también, como Δ es a E, así Z a H. Y, por alternancia, como Δ es a Z, así E a H [VIII, 13].

Por consiguiente, A, B son números planos semejantes: porque sus lados son proporcionales. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 21

Si entre dos números caen dos números medios proporcionales, los números son sólidos semejantes.

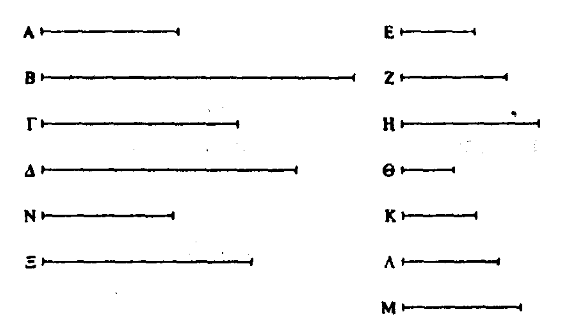
Pues caigan dos números medios proporcionales Γ, Δ entre los números A, B.

Digo que A, B son (números) sólidos semejantes.

Pues tómense tres números E, Z, H los menores de los que guardan la misma razón que A, Γ, Δ [VII, 33 y VIII, 2]; entonces sus extremos E, H son primos entre sí [VIII, 3]. Y puesto que entre E, H ha caído un número medio proporcional, Z, entonces E, H son números planos semejantes [VIII, 20]. Pues bien, sean Θ, K los lados de E, y Λ, M los de H. Luego queda claro a partir de la (proposición) anterior que

[113] Heath considera corruptas estas líneas porque no es necesario inferir que como Δ es a E, así A a Γ, ya que forma parte de la hipótesis. Además, contra lo habitual en este texto, la afirmación de que Z, al multiplicar a E, ha hecho Γ, se presenta sin explicación detallada. Sin embargo los editores no indican nada al respecto. Por otra parte, esta proposición es la conversa de VIII 18.

E, Z, H son continuamente proporcionales en la razón de Θ a Λ y en la de K a M. Y como E, Z, H son los (números) me-



nores de los que guardan la misma razón que A, Γ, Δ y la cantidad de los (números) E, Z, H es igual a la cantidad de los (números) A, Γ, Δ, entonces, por igualdad, como E es a H, así A a Δ [VII, 14]. Pero E, H son primos y los primos son también los menores [VII, 21], pero los menores miden a los que guardan la misma razón que ellos el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor, es decir el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]; entonces E mide a A el mismo número de veces que H a Δ. Ahora bien, cuantas veces E mide a A, tantas unidades haya en N. Entonces N, al multiplicar a E, ha hecho el (número) A. Pero E es el (producto) de Θ, K; luego N, al multiplicar al (producto) de Θ, K, ha hecho el (número) A. Por tanto, A es un (número) sólido y Θ, K, N son sus lados. Puesto que a su vez E, Z, H son los (números) menores de los que guardan la misma razón que Γ, Δ, B, entonces E mide a Γ el mismo número de veces que H a B. Ahora bien, cuantas veces E mide a Γ, tantas unidades haya en Ξ. Entonces H mide a B según las unidades de Ξ; luego Ξ, al multiplicar a H, ha hecho el (número) B. Pero H es el (producto) de Λ, M;

entonces Ξ, al multiplicar al (producto) de Λ, M, ha hecho el (número) B. Luego B es un número sólido y Λ, M, Ξ sus lados; por tanto, A y B son (números) sólidos.

Digo que también son semejantes. Pues como N, Ξ, al multiplicar a E, han hecho los números A, Γ (respectivamente), entonces, como N es a Ξ, A es a Γ, es decir, E a Z [VII, 18]. Pero como E es a Z, Θ es a Λ y K a M; luego, como Θ es a Λ, así K a M y N a Λ. Pero Θ, K, N son los lados de A, mientras que Ξ, Λ, M son los lados de B. Por consiguiente, A, B son números sólidos semejantes. Q. E. D.

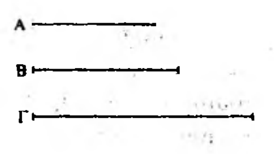
Proposición 22

Si tres números son continuamente proporcionales y el primero es cuadrado, el tercero será también cuadrado.

Sean A, B, Γ tres números continuamente proporcionales y el primero, A, sea cuadrado.

Digo que también el tercero, Γ, es cuadrado.

Pues como entre A, Γ hay un número B (que es) media proporcional, entonces A, Γ son (números) planos semejantes [VIII, 20]. Pero A es cuadrado.



Por consiguiente, también Γ es cuadrado. Q. E. D.

Proposición 23

Si cuatro números son continuamente proporcionales y el primero es cubo, también el cuarto será cubo.

Sean A, B, Γ, Δ cuatro números continuamente proporcionales y sea A cubo.

Digo que Δ también es cubo.

Pues como entre A, Δ hay dos números B, Γ (que son) medias proporcionales, entonces A, Δ son dos números sólidos semejantes [VIII, 21]. Pero A es cubo.

Por consiguiente, también Δ es cubo. Q. E. D.

Proposición 24

Si dos números guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado y el primero es cuadrado, el segundo será también cuadrado.

Pues guarden entre sí los dos números A, B la razón que guarda el número cuadrado Γ con el número cuadrado Δ, y sea A cuadrado.

Digo que también B es cuadrado.

Pues como Γ, Δ son cuadrados, entonces, Γ, Δ son (números) planos semejantes. Por tanto, entre Γ, Δ cae un número medio pro-

porcional [VIII, 18], y como Γ es a Δ, A es a B; luego entre A, B cae también un número medio proporcional [VIII, 8]. Pero A es cuadrado.

Por consiguiente, también B es cuadrado [VIII, 22]. Q. E. D.

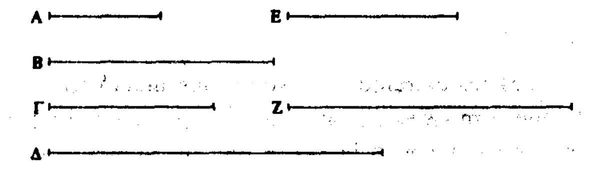
PROPOSICIÓN 25

Si dos números guardan entre sí la razón que un número cubo guarda con un número cubo y el primero es cubo, el segundo será también cubo.

Pues guarden entre sí los dos números A, B la razón que el número cubo Γ guarda con el número cubo Δ, y sea A cubo.

Digo que B es también cubo.

Pues como Γ, Δ son cubos, son (números) sólidos semejantes; entonces entre Γ, Δ caen dos números (que son) me-



dias proporcionales [VIII, 19]. Pero cuantos (números) caen en proporción continua entre Γ, Δ, tantos (caerán) también entre los que guardan la misma razón con ellos [VIII, 8]. De modo que entre A, B caen también dos números (que son) medias proporcionales. Caigan E, Z. Pues bien, como los números A, E, Z, B son continuamente proporcionales y A es cubo, entonces B es también cubo [VIII, 23]. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 26

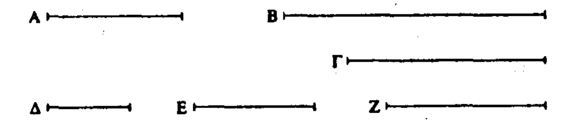
Los números planos semejantes guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Sean A, B dos números planos semejantes.

Digo que A guarda con B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Pues como A, B son números planos semejantes, entonces entre A, B cae un número (que es) media proporcional [VIII, 18].

Caiga y sea Γ, y tómense los números menores Δ, E, Z de los que guardan la misma razón que A, Γ, B [VII, 33 y VIII,



2]; entonces sus extremos Δ, Z son cuadrados [VIII, 2, Por.]. Puesto que como Δ es a Z, así A a B y Δ, Z son cuadrados, entonces A guarda con B la razón que un número cuadrado (guarda) con un número cuadrado. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 27

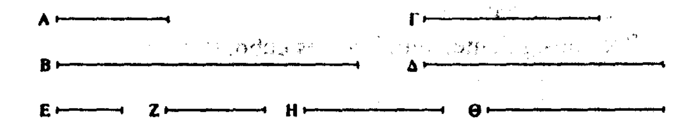
Los números sólidos semejantes guardan entre sí la razón que un número cubo (guarda) con un número cubo.

Sean A, B números sólidos semejantes.

Digo que A guarda con B la razón que un número cubo (guarda) con un número cubo.

Pues como A, B son sólidos semejantes, entonces entre A, B caen dos números (que son) medias proporcionales [VIII, 19].

Caigan Γ, Δ y tómense E, Z, H, Θ, los (números) menores de los que guardan la misma razón que A, Γ, Δ, B e iguales a



ellos en número [VII, 33 y VIII, 2]. Entonces, sus extremos E, Θ son cubos [VIII, 2, Por.]. Ahora bien, como E es a Θ, así A a B; entonces A guarda también con B la razón que un número cubo guarda con un número cubo. Q. E. D.[114].

---

[114] Al-Nayrīzī recoge dos proposiciones en su comentario añadidas por Herón:

a. Si dos números guardan entre sí la razón que un cuadrado guarda con un cuadrado, los números son planos semejantes.

b. Si dos números guardan entre sí la razón que un cubo guarda con un cubo, los números son sólidos semejantes.

Estas proposiciones son las conversas de VIII 26 y 27, respectivamente.

LIBRO NOVENO

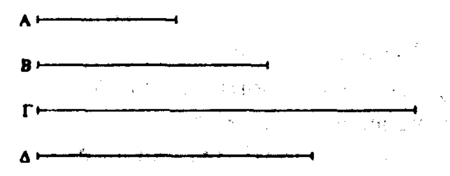
PROPOSICIÓN 1

Si dos números planos semejantes, al multiplicarse entre sí, hacen un número, el producto será cuadrado.

Sean A, B dos números planos semejantes y A, al multiplicar a B, haga el (número) Γ.

Digo que Γ es cuadrado.

Pues haga A, al multiplicarse por sí mismo, el número Δ. Entonces Δ es cuadrado. Pues bien, como A, al multiplicarse



por sí mismo, ha hecho el (número) Δ y, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Γ, entonces como A es a B, así Δ a Γ [VII, 17].

Y puesto que A, B son números planos semejantes, entonces entre A, B cae un número (que es) media proporcional [VIII, 18]. Pero, si entre dos números caen números en proporción continua, cuantos caigan entre ellos, tantos (caerán)

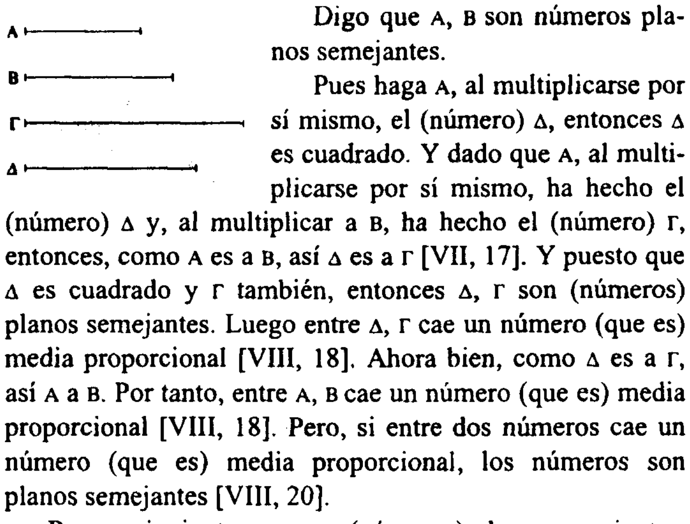
entre los que guardan la misma razón con ellos [VIII, 8]; de modo que entre Γ, Δ cae también un número (que es) media proporcional. Ahora bien, Δ es cuadrado.

Por consiguiente, también Γ es cuadrado [VIII, 22]. Q. E. D.

Proposición 2

Si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen un (número) cuadrado, son números planos semejantes.

Sean A, B los dos números y A, al multiplicar a B, haga el (número) cuadrado Γ.



Digo que A, B son números planos semejantes.

Pues haga A, al multiplicarse por sí mismo, el (número) Δ, entonces Δ es cuadrado. Y dado que A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) Δ y, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Γ, entonces, como A es a B, así Δ es a Γ [VII, 17]. Y puesto que Δ es cuadrado y Γ también, entonces Δ, Γ son (números) planos semejantes. Luego entre Δ, Γ cae un número (que es) media proporcional [VIII, 18]. Ahora bien, como Δ es a Γ, así A a B. Por tanto, entre A, B cae un número (que es) media proporcional [VIII, 18]. Pero, si entre dos números cae un número (que es) media proporcional, los números son planos semejantes [VIII, 20].

Por consiguiente, A, B son (números) planos semejantes. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 3

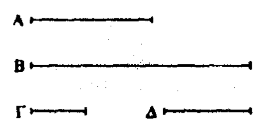
Si un número cubo, al multiplicarse por sí mismo, hace algún número, el producto será cubo.

Haga, pues, el número A, al multiplicarse por sí mismo, el número B.

Digo que B es cubo.

Pues tómese Γ, el lado de A, y Γ, al multiplicarse por sí mismo, haga el (número) Δ.

Entonces queda claro que Γ, al multiplicar a Δ, ha hecho el (número) A. Y como Γ, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho Δ, entonces, Γ mide a Δ según sus propias unidades. Pero, además, la unidad mide también según sus propias unidades a Γ. Por tanto, como la unidad es a Γ, Γ es a Δ [VII, Def. 21].



Como Γ, al multiplicar a su vez a Δ, ha hecho el (número) A, entonces, Δ mide a A según las unidades de Γ. Pero la unidad también mide a Γ según sus unidades; luego, como la unidad es a Γ, Δ es a A. Y como la unidad es a Γ, Γ es a Δ; entonces, también, como la unidad es a Γ, así Γ a Δ y Γ a A. Por tanto, entre la unidad y el número A han caído dos números en proporción continua Γ, Δ (que son) medias proporcionales.

Como A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho a su vez el (número) B, entonces A mide a B según sus propias unidades. Pero la unidad también mide a A según sus unidades; entonces, como la unidad es a A, A es a B [VII, Def. 21].

Y entre la unidad y A han caído dos números (que son) medias proporcionales; por tanto, entre A y B caerán también dos números (que son) medias proporcionales [VIII, 8]. Pero si caen dos números (que son) medias proporcionales entre dos números y el primero es cubo, también el segundo será cubo [VIII, 23]. Ahora bien, A es cubo.

Por consiguiente, también B es cubo. Q. E. D.

Proposición 4

Si un número cubo, al multiplicar a un número cubo, hace algún (número), el producto será cubo.

Pues un número cubo A, al multiplicar a un número cubo B, haga el (número) Γ.

A

B

Γ

Δ

Digo que Γ es cubo.

Pues haga A, al multiplicarse por sí mismo, el (número) Δ, entonces Δ es cubo [IX, 3]. Y, dado que A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el número Δ y, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Γ, entonces, como A es a B, así Δ a Γ [VII, 17]. Ahora bien, puesto que A, B son cubos, A, B son sólidos semejantes. Por tanto, entre A, B caen dos números (que son) medias proporcionales [VIII, 19]; de modo que entre Δ, Γ caerán también dos (números que son) medias proporcionales [VIII, 8]. Pero Δ es cubo.

Por consiguiente, también Γ es cubo [VIII, 23]. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 5

Si un número cubo, al multiplicar a algún número, hace un (número) cubo, el número multiplicado también será cubo.

Pues haga el número cubo A, al multiplicar a un número B, el número cubo Γ.

Digo que B es cubo.

Pues A, al multiplicarse por sí mismo, haga el (número) Δ; entonces Δ es cubo [IX, 3], y dado que A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) Δ y, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Γ, entonces, como A es a B, Δ es a Γ [VII, 17]. Ahora bien, puesto que Δ, Γ son cubos, son sólidos semejantes. Por tanto, entre Δ, Γ caen dos números (que son) medias proporcionales [VIII, 19]. Ahora bien, como Δ es a Γ, así A es a B; entonces también entre A, B caen dos números (que son) medias proporcionales [VIII, 8]. Pero A es cubo.

Por consiguiente, también B es cubo [VIII, 23]. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 6

Si un número, al multiplicarse por sí mismo, hace un (número) cubo, también él mismo será cubo.

Pues haga el número A, al multiplicarse por sí mismo, el (número) cubo B.

Digo que A también es cubo.

Pues A, al multiplicar a B, haga el (número) Γ. Pues bien, dado que A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) B y, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Γ, entonces Γ es cubo. Y puesto que A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) B, entonces A mide según sus propias unidades a B. Pero también la unidad mide a A según sus unidades. Entonces, como la unidad es a A, así A es a B [VII, Def. 21]. Ahora bien, puesto que A, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Γ, entonces B mide a Γ según las unidades de A. Pero también la unidad mide a A según sus unidades. Por tanto, como la unidad es a A, así B a Γ [VII, Def. 21]. Pero como la unidad es a A, así A a B; entonces, como A es a B, B es a Γ. Y como B, Γ son cubos, son sólidos semejantes. Por tanto, entre B, Γ hay dos números medios proporcionales [VIII, 19]. Ahora bien, como B es a Γ, A es a B. Luego entre A, B hay dos números (que son) medias proporcionales [VIII, 8]. Pero B es cubo.

Por consiguiente, A también es cubo. Q. E. D.

Proposición 7

Si un número compuesto, al multiplicar a un número, hace algún (número), el producto será sólido.

Haga, pues, el número compuesto A, al multiplicar a un número B, el (número) Γ.

Digo que Γ es sólido.

Pues como A es compuesto, será medido por algún número [VII, Def. 14]. Sea medido por Δ y cuantas veces Δ

mide a A, tantas unidades haya en E. En efecto, como Δ mide a A según las unidades de E, entonces E, al multiplicar a Δ, ha hecho el (número) A [VII, Def. 16]. Ahora bien, como A, al multiplicar a B, ha hecho Γ, y A es el producto de Δ, E, entonces el producto de Δ, E, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Γ.

Por consiguiente, Γ es sólido y sus lados son Δ, E, B. Q. E. D.

Proposición 8

Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales, el tercero a partir de la unidad será cuadrado, así como todos los que dejan un intervalo de uno, y el cuarto será cubo, así como todos los que dejan un intervalo de dos, y el séptimo será al mismo tiempo cubo y cuadrado, así como todos los que dejan un intervalo de cinco.

Sean A, B, Γ, Δ, E, Z tantos números como se quiera continuamente proporcionales a partir de una unidad.

Digo que B, el tercero a partir de la unidad, es cuadrado, así como todos los que dejan un intervalo de uno, y Γ, el cuarto, es cubo, así como todos los que dejan un intervalo

de dos, y Z, el séptimo, es al mismo tiempo cubo y cuadrado, así como todos los que dejan un intervalo de cinco.

Pues, como la unidad es a A, así A a B; entonces la unidad mide al número A el mismo número de veces que A a B [VII, Def. 21]. Pero la unidad mide a A según sus unidades; entonces, A mide a B también según las unidades de A. Luego, A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) B; por tanto, B es cuadrado. Ahora bien, puesto que B, Γ, Δ son continuamente proporcionales, y B es cuadrado, también Δ es cuadrado [VIII, 22]. Por lo mismo, Z también es cuadrado. De manera semejante demostraríamos que todos los que dejan un intervalo de uno son también cuadrados.

Digo además que Γ, el cuarto a partir de la unidad, es cubo, así como todos los que dejan un intervalo de dos.

Pues, como la unidad es a A, así B a Γ, entonces, la unidad mide al número A el mismo número de veces que B a Γ. Pero la unidad mide al número A según las unidades de A; entonces B mide a Γ según las unidades de A; por tanto, A, al multiplicar al número B, ha hecho el (número) Γ; y, en efecto, como A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) B y, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Γ, entonces Γ es cubo. Ahora bien, como Γ, Δ, E, Z son continuamente proporcionales y Γ es cubo, entonces Z también es cubo [VIII, 23]; pero se ha demostrado que también es cuadrado; por tanto, el séptimo a partir de la unidad es cubo y cuadrado.

De manera semejante demostraríamos que todos los que dejan un intervalo de cinco son cubos y cuadrados. Q. E. D.[115].

[115] En la progresión geométrica $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7$...
Los términos $3.^o = a^2$, $5.^o = a^4$ y $7.^o = a^6$ son cuadrados.
Los términos $4.^o = a^3$, $7.^o = a^6$ y $10.^o = a^9$ son cubos.
Los términos $7.^o = a^6$ y $13.^o = a^{12}$ son cuadrados y cubos a la vez.

PROPOSICIÓN 9

Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales, y el número siguiente a la unidad es cuadrado, todos los demás serán también cuadrados, y si el número siguiente a la unidad es cubo, todos los demás serán también cubos.

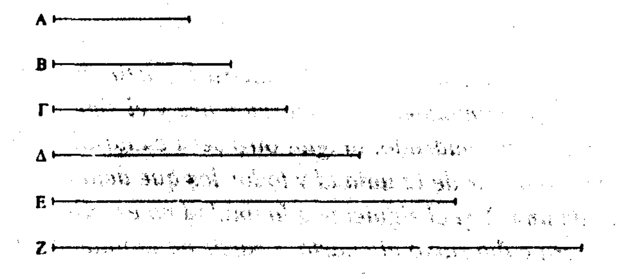
Sean A, B, Γ, Δ, E, Z tantos números como se quiera continuamente proporcionales a partir de una unidad, y sea A, el siguiente a la unidad, cuadrado.

Digo que también todos los demás serán cuadrados.

Se ha demostrado, en efecto, que B, el tercero a partir de la unidad, es cuadrado, así como todos los que dejan un intervalo de uno [IX, 8].

Digo que todos los demás son también cuadrados.

Pues como A, B, Γ son continuamente proporcionales y A es cuadrado, también Γ es cuadrado [VIII, 22]. Como B, Γ, Δ



son a su vez continuamente proporcionales y B es cuadrado, Δ es también cuadrado [VIII, 22]. De manera semejante demostraríamos que todos los demás son cuadrados.

Pero ahora sea A cubo.

Digo que también todos los demás son cubos.

Se ha demostrado, en efecto, que Γ, el cuarto a partir de la unidad, es cubo, así como todos los que dejan un intervalo de dos [IX, 8].

Digo que todos los demás son también cubos.

Puesto que como la unidad es a A, así A a B, entonces la unidad mide a A el mismo número de veces que A a B. Pero la unidad mide a A según sus unidades, entonces A mide según sus propias unidades a B; así pues, A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho B. Y A es cubo. Pero si un número cubo, al multiplicarse por sí mismo, hace algún (número), el producto es cubo [IX, 3]; entonces B es cubo. Ahora bien, puesto que los cuatro números A, B, Γ, Δ son continuamente proporcionales y A es cubo, entonces Δ es cubo [VIII, 23]. Luego, por lo mismo, E es también cubo y de manera semejante todos los demás son cubos. Q. E. D.

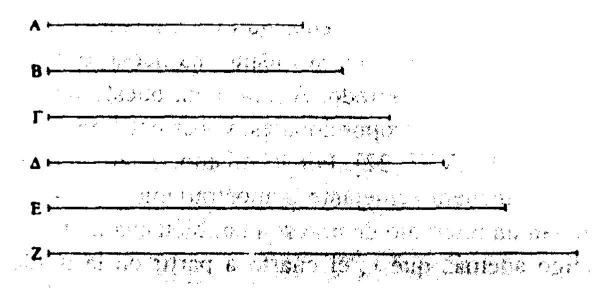
Proposición 10

Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son [continuamente] proporcionales y el siguiente a la unidad no es cuadrado, ningún otro será cuadrado salvo el tercero a partir de la unidad y todos los que dejan un intervalo de uno. Y si el siguiente a la unidad no es cubo, ningún otro será cubo salvo el cuarto a partir de la unidad y todos los que dejan un intervalo de dos.

Sean A, B, Γ, Δ, E, Z tantos números como se quiera continuamente proporcionales a partir de una unidad y A, el siguiente a la unidad, no sea cuadrado.

Digo que ningún otro será cuadrado salvo el tercero a partir de la unidad [y los que dejan un intervalo de uno].

Pues, si es posible, sea Γ cuadrado. Pero Β también es cuadrado [IX, 8]. Entonces Β, Γ guardan entre sí la razón



que un número cuadrado guarda con un número cuadrado[116]. Y como Β es a Γ, Α es a Β; entonces Α, Β guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; de modo que Α, Β son (números) planos semejantes [VIII, 26 conversa]. Ahora bien, Β es cuadrado; luego Α es también cuadrado; lo que precisamente se ha supuesto que no. Por tanto, Γ no es cuadrado.

De manera semejante demostraríamos que ningún otro es cuadrado salvo el tercero a partir de la unidad y los que dejan un intervalo de uno.

Pero ahora no sea Α cubo.

Digo que ningún otro será cubo salvo el cuarto a partir de la unidad y los que dejan un intervalo de dos.

---

[116] En sus notas a la traducción al latín de los *Elementos*, Heiberg dice que las palabras «de modo que Α, Β son planos semejantes» quizá sean espurias, porque resulta más difícil utilizar VIII 24, que la conversa de VIII 26. Además, el uso de VIII 24, se correspondería mejor con la utilización de VIII 25, en la parte relativa a cubos. Sin embargo no atetiza esta parte en su edición.

Pues, si es posible, sea Δ cubo. Pero Γ también es cubo: pues es el cuarto a partir de la unidad [IX, 8]. Y como Γ es a Δ, B es a Γ; entonces B guarda con Γ la razón que un cubo (guarda) con un cubo. Ahora bien, Γ es cubo; entonces B también es cubo [VIII, 25]. Y dado que, como la unidad es a A, A es a B, y la unidad mide a A según sus unidades, entonces, A mide según sus propias unidades a B. Por tanto, A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) cubo B. Pero si un número al multiplicarse por sí mismo hace un (número) cubo, también él mismo será cubo [IX, 6]. Entonces A también es cubo, lo que precisamente se ha supuesto que no. Así pues, Δ no es cubo. De manera semejante demostraríamos que ningún otro es cubo salvo el cuarto a partir de la unidad y los que dejan un intervalo de dos. Q. E. D.

Proposición 11

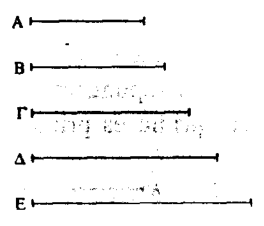
Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales, el menor mide al mayor según uno de los que se encuentran entre los números proporcionales.

Sean B, Γ, Δ, E, tantos números como se quiera continuamente proporcionales a partir de la unidad A.

Digo que B, el menor de los (números) B, Γ, Δ, E, mide a E según uno de los (números) Γ, Δ.

Puesto que, como la unidad A es a B, así Δ a E, entonces, la unidad A mide al número B el mismo número de veces que Δ a E; así pues, por alternancia, la unidad A mide a Δ el mismo número de veces que B a E [VII, 15]. Pero la unidad

A mide a Δ según sus unidades; entonces, B también mide a E según las unidades de Δ; de modo que el menor, B, mide al mayor, E, según un número de los que se encuentran entre los números proporcionales.



Porisma:

Y queda claro que aquel lugar que tenga el (número) que mide a partir de la unidad, el mismo lugar tiene también el (número) según el cual mide a partir del (número) medido en la dirección del (número) anterior a él. Q. E. D.[117].

Proposición 12

Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales, por cuantos números primos sea medido el último, por los mismos será medido también el siguiente a la unidad.

Sean A, B, Γ, Δ cuantos números se quiera proporcionales a partir de una unidad.

---

[117] El porisma se puede relacionar con una proposición de Arquímedes en el *Arenario*, en la que estipula que, si dos números en proporción continua a partir de la unidad se multiplican entre sí, el producto estará en la misma serie y su lugar a partir del factor mayor será igual al lugar del factor menor a partir de la unidad, y distará de la unidad un lugar menos que la suma de los factores a partir de la unidad.

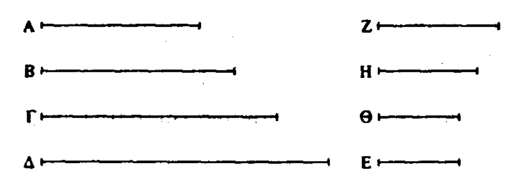
Esta regla hace posible determinar en la progresión geométrica A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I, K, Λ, en la que A = 1, el producto de Δ . Θ con relación a Λ, dado que Λ dista de Θ tanto como Δ de A. Además establece que el número Λ puede hallarse reduciendo la suma de los números Δ y Θ en 1.

Digo que por cuantos números primos sea medido Δ, por los mismos será medido A.

Pues sea medido Δ por algún número primo E.

Digo que E mide a A.

Pues supongamos que no; pero E es primo, y todo número primo es primo con respecto al (número) al que no



mide [VII, 29]; entonces E, A son primos entre sí. Y ya que E mide a Δ, mídalo según las unidades de Z. Entonces E, al multiplicar a Z, ha hecho el (número) Δ. Y puesto que, a su vez, A mide a Δ según las unidades de Γ [IX 11], entonces A, al multiplicar a Γ, ha hecho el (número) Δ. Pero, en efecto, E, al multiplicar a Z, ha hecho también el (número) Δ; entonces, el (producto) de A, Γ es igual al (producto) de E, Z. Así pues, como A es a E, Z es a Γ [VII, 19]. Pero A, E son primos, y los primos son también los menores [VII, 21], y los menores miden a los que guardan la misma razón con ellos el mismo número de veces, el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]; entonces E mide a Γ. Mídalo según H; entonces E, al multiplicar a H, ha hecho el (número) Γ. Pero, además, por la (proposición) anterior, A, al multiplicar a B, ha hecho también el (número) Γ [IX, 11 Por.]. Así pues, el producto de A, B es igual al producto de E, H. Por tanto, como A es a E, H es a B [VII, 19]. Pero A, E son primos, y los primos son también los menores [VII, 21], y los números menores miden a los que guardan la misma razón que ellos el mismo número de veces, el antecedente al

antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]; por tanto, E mide a B. Mídalo según Θ; entonces E, al multiplicar a Θ, ha hecho el (número) B. Pero además A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho también el (número) B [IX, 8]. Por tanto, el producto de E, Θ es igual al cuadrado de A. Luego, como E es a A, A es a Θ [VII, 19]. Pero A, E son primos, y los primos son los menores [VII, 2], y los menores miden a los que guardan la misma razón que ellos el mismo número de veces, el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]; así pues, E mide a A como el antecedente al antecedente. Pero, por otra parte, no lo mide. Lo cual es imposible. Entonces E, A no son primos entre sí, luego son compuestos. Pero los compuestos son medidos por un número [VII, Def. 15]. Ahora bien, como se ha supuesto que E es primo, y el (número) primo no es medido por otro número que (no sea) él mismo, entonces E mide a A, E; de modo que E mide a A. Y mide también a Δ: entonces E mide a A, Δ[118]. De manera semejante demostraríamos que por cuantos números primos sea medido Δ, por los mismos será medido A. Q. E. D.

---

[118] Heiberg, en el comentario añadido a su traducción latina de los *Elementos*, señala que las palabras «pero mide también a Δ: entonces E mide a Δ» son superfluas y quizás hayan sido interpoladas. La prueba de esta proposición es una muestra de una notable reducción apagógica, en la que la proposición misma se sigue lógicamente —por reducción al absurdo— de su propia negación. Clavio dio el nombre de «consequentia mirabilis» a este patrón reductivo y desmintió la pretensión de Cardano de haber sido el primero en utilizar este procedimiento de prueba. Por lo demás, luego cobró especial relieve en geometría gracias al intento de G. Saccheri (en su *Euclides ab omni naevo vindicatus*, 1733) de demostrar el famoso postulado de las paralelas en sus términos; el intento, como hoy es bien sabido, fue un intento fallido; no obstante, en el curso de su trabajo, Saccheri se encontró con diversos resultados geométricos no euclidianos, aunque, desde luego, no llegó a reconocerles la significación y la entidad que adquirieron a partir de las geometrías no euclidianas del s. XIX.

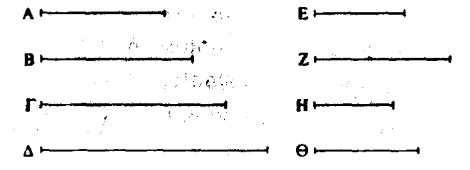
PROPOSICIÓN 13

Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales y el siguiente a la unidad es primo, el mayor no será medido por ningún otro fuera de los que se encuentran entre los números proporcionales.

Sean A, B, Γ, Δ tantos números como se quiera continuamente proporcionales a partir de una unidad y sea A, el siguiente a la unidad, primo.

Digo que Δ, el mayor de ellos, no será medido por ningún otro fuera de A, B, Γ.

Pues, si fuera posible, sea medido por E, y no sea E el mismo que ninguno de los (números) A, B, Γ. Está claro,



pues, que E no es primo. Porque, si E es primo y mide a Δ, también medirá a A [IX, 12], que es primo sin ser el mismo que él. Lo cual es imposible. Entonces, E no es primo. Luego es compuesto. Pero todo número compuesto es medido por algún número primo [VII, 31]. Por tanto, E es medido por algún número primo.

Digo ahora que no será medido por ningún otro (número) primo salvo A. Pues, si E es medido por otro y E mide a Δ, entonces ese otro también medirá a Δ [IX, 12]; de modo que también medirá a A [IX, 12], que es primo sin ser el mismo que él; lo cual es imposible. Así pues, A mide a E. Y como E mide a Δ, mídalo según Z.

Digo que Z no es el mismo que ninguno de los (números) A, B, Γ. Porque si Z es el mismo que alguno de los (números) A, B, Γ y mide a Δ según E, entonces, uno de los (números) A, B, Γ mide a Δ según E. Pero uno de los (números) A, B, Γ mide a Δ según alguno de los (números) A, B, Γ [IX, 11]. Entonces E es el mismo que uno de los (números) A, B, Γ; lo que precisamente se ha supuesto que no. Por tanto, Z no es el mismo que ninguno de los (números) A, B, Γ. Demostraríamos ahora de manera semejante que Z es medido por A, demostrando que Z, a su vez, no es primo. Porque si (lo es) y mide a Δ, medirá también a A [IX, 12], que es primo sin ser el mismo que él; lo cual es imposible; por tanto, Z no es primo; luego es compuesto. Pero todo número compuesto es medido por algún número primo [VII, 31]; luego Z es medido por algún número primo.

Digo ahora que no será medido por ningún otro (número) primo salvo A. Pues si algún otro (número) primo mide a Z y Z mide a Δ, entonces, ese otro medirá también a Δ; de modo que medirá también a A [IX, 12], que es primo sin ser el mismo que él; lo cual es imposible. Así pues, A mide a Z. Ahora bien, puesto que E mide a Δ según Z, entonces E, al multiplicar a Z, ha hecho el (número) Δ. Pero A, al multiplicar a Γ, ha hecho el número Δ [IX, 11]; entonces el producto de A, Γ es igual al producto de E, Z. Luego, proporcionalmente, como A es a E, así Z es a Γ [VII, 19]. Pero A mide a E; entonces Z mide también a Γ. Mídalo según H. De manera semejante demostraríamos que H no es el mismo que ninguno de los números A, B y que es medido por A. Y puesto que Z mide a Γ según H, entonces Z, al multiplicar a H, ha hecho el (número) Γ. Pero A, al multiplicar a B, ha hecho también el (número) Γ [IX, 11]; entonces el producto de A, B es igual al producto de Z, H. Luego, proporcionalmente, como A es a Z, H a B [VII, 19]. Pero A mide a

Z; entonces H también mide a B. Mídalo según Θ. De manera semejante demostraríamos que Θ no es el mismo que A. Y puesto que H mide a B según Θ, entonces H, al multiplicar a Θ, ha hecho el (número) B. Pero A, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho también el (número) B [IX, 8]. Entonces el producto de Θ, H es igual al cuadrado de A. Luego como Θ es a A, A es a H [VII, 19]. Pero A mide a H; luego Θ también mide a A, que es primo sin ser el mismo que él; lo cual es imposible.

Por consiguiente, el mayor, Δ, no será medido por otro número fuera de A, B, Γ. Q. E. D.

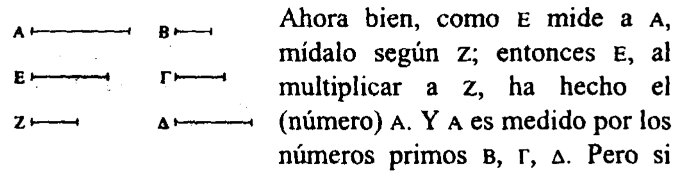
Proposición 14

Si un número es el menor medido por números primos, no será medido por ningún otro número primo fuera de los que le medían desde un principio.

Pues sea A el número menor medido por los números primos B, Γ, Δ.

Digo que A no será medido por ningún otro fuera de B, Γ, Δ.

Pues, si es posible, sea medido por el (número) primo E, y no sea E el mismo que ninguno de los números B, Γ, Δ.



Ahora bien, como E mide a A, mídalo según Z; entonces E, al multiplicar a Z, ha hecho el (número) A. Y A es medido por los números primos B, Γ, Δ. Pero si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número), y algún número primo mide a su producto, medirá también a uno de los iniciales [VII, 30]; entonces B, Γ, Δ medirán a uno de los (números) E, Z. Ahora bien, no

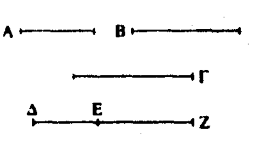
medirán a E; porque E es primo y no es el mismo que ninguno de los (números) B, Γ, Δ. Entonces, medirán a Z que es menor que A; lo cual es imposible. Porque se ha supuesto que A es el menor medido por B, Γ, Δ. Por consiguiente, ningún número primo mide a A, fuera de B, Γ, Δ. Q. E. D.[119].

Proposición 15

Si tres números continuamente proporcionales son los menores de los que guardan la misma razón que ellos, cualesquiera dos tomados juntos son primos con respecto al restante.

Sean A, B, Γ tres números continuamente proporcionales, los menores de los que guardan la misma razón que ellos.

Digo que dos cualesquiera de los (números) A, B, Γ tomados juntos son primos con respecto al restante, tanto A, B con respecto a Γ, como B, Γ con respecto a A, como también A, Γ con respecto a B.



Tómense pues los números ΔE, EZ, los menores de los que guardan la misma razón que A, B, Γ [VIII, 2]. Está claro que ΔE, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) A, mientras que, al multiplicar a EZ, ha hecho el (número) B, y además EZ, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho el (número) Γ [VIII, 2]. Y como ΔE, EZ son los menores, son primos entre sí [VII, 22]. Pero, si dos números son primos entre sí, también la suma de ambos es primo con respecto a

[119] En otras palabras, la descomposición de un número en factores primos es unívoca.

cada uno de los dos [VII, 28]. Entonces ΔΖ también es primo con respecto a cada uno de los (números) ΔΕ, ΕΖ.

Pero, en efecto, ΔΕ también es primo con respecto a ΕΖ; entonces ΔΖ, ΔΕ son primos con respecto a ΕΖ. Pero si dos números son primos con respecto a un (número), su producto también es primo con respecto al restante [VII, 24]; de modo que el producto de ΖΔ, ΔΕ es primo con respecto a ΕΖ. De modo que el producto de ΖΔ, ΔΕ es primo con respecto al cuadrado de ΕΖ [VII, 25]. Pero el producto de ΖΔ, ΔΕ es el cuadrado de ΔΕ junto con el producto de ΔΕ, ΕΖ [II, 3]; entonces, el cuadrado de ΔΕ junto con el producto de ΔΕ, ΕΖ es primo con respecto al cuadrado de ΕΖ. Ahora bien, el cuadrado de ΔΕ es Α, mientras que el producto de ΔΕ, ΕΖ es Β y el cuadrado de ΕΖ es Γ. Por tanto, Α, Β tomados juntos son primos con respecto a Γ. De manera semejante demostraríamos que Β, Γ tomados juntos son primos con respecto a Α.

Digo además que Α, Γ tomados juntos son también primos con respecto a Β.

Pues, dado que ΔΖ es primo con respecto a cada uno de los (números) ΔΕ, ΕΖ, el cuadrado de ΔΖ es también primo con respecto al producto de ΔΕ, ΕΖ [VII, 24-25]. Pero los cuadrados de ΔΕ, ΕΖ junto con dos veces el producto de ΔΕ, ΕΖ son iguales al cuadrado de ΔΖ [II, 4]; por tanto, los cuadrados de ΔΕ, ΕΖ junto con dos veces el producto de ΔΕ, ΕΖ son primos con respecto al producto de ΔΕ, ΕΖ. Por separación, los cuadrados de ΔΕ, ΕΖ junto con una vez el producto de ΔΕ, ΕΖ son primos con respecto al producto de ΔΕ, ΕΖ. Así pues, también, por separación, los cuadrados de ΔΕ, ΕΖ son primos con respecto al producto de ΔΕ, ΕΖ. Ahora bien, el cuadrado de ΔΕ es Α, mientras que el producto de ΔΕ, ΕΖ es Β, y el cuadrado de ΕΖ es Γ.

Por consiguiente, A, Γ tomados juntos son primos con respecto a B. Q. E. D.[120].

Proposición 16

Si dos números son primos entre sí, como el primero es al segundo, el segundo no será a ningún otro.

Pues sean A, B dos números primos entre sí.

Digo que como A es a B, así B no será a ningún otro.

Pues, si fuera posible, sea B a Γ como A a B. Pero A, B son primos, y los primos son también los menores y los números menores miden a los que guardan la misma razón que ellos el mismo número de veces, el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]; entonces A mide a B como el antecedente al antecedente. Pero también se mide a sí mismo; entonces A mide a A, B, que son primos entre sí; lo cual es absurdo.

Por consiguiente, B no será a Γ como A a B. Q. E. D.

[120] Esta proposición permite establecer de manera relativamente sencilla la imposibilidad de dividir un segmento en extrema y media razón racionales, operación que se expresa mediante la ecuación: $a^2 + ab = b^2$ (siendo a y b enteros). Su última parte se puede relacionar con un problema que aparece ya en las tablillas babilonias: hallar un rectángulo de lados racionales, dada la razón entre su área y el cuadrado de la diagonal.

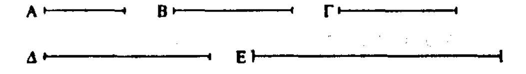
Proposición 17

Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales y sus extremos son primos entre sí, como el primero es al segundo, el último no será a ningún otro.

Sean A, B, Γ, Δ tantos números como se quiera continuamente proporcionales y sean sus extremos, A, Δ, primos entre sí.

Digo que como A es a B, así Δ a ningún otro.

Pues, si fuera posible, sea Δ a E como A a B; entonces, por alternancia, como A es a Δ, B es a E [VIII, 13]. Pero A, Δ



son primos, y los primos son también los menores [VII, 21], y los números menores miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]. Entonces, A mide a B. Ahora bien, como A es a B, así B a Γ. Entonces, B mide también a Γ. De modo que A mide también a Γ. Y dado que, como B es a Γ, Γ es a Δ y B mide a Γ, entonces Γ también mide a Δ. Pero A medía a Γ; de modo que A mide también a Δ. Pero se mide también a sí mismo. Entonces, A mide a A, Δ, que son primos entre sí; lo cual es imposible.

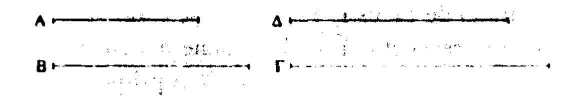
Por consiguiente, como A es a B, Δ no será a ningún otro. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 18

Dados dos números, investigar si es posible hallar un tercero proporcional.

Sean A, B los dos números dados y sea lo requerido investigar si es posible hallar un tercero proporcional a ellos.

Así pues, A, B o son primos entre sí, o no. Ahora bien, si son primos entre sí, se ha demostrado que es imposible hallar un tercero proporcional a ellos [IX, 16].



Pero ahora no sean A, B primos entre sí, y B, al multiplicarse por sí mismo, haga el (número) Γ; entonces A o mide a Γ o no lo mide. En primer lugar mídalo según Δ; entonces A, al multiplicar a Δ, ha hecho el (número) Γ. Pero, en efecto, B, al multiplicarse por sí mismo, ha hecho también el número Γ; entonces el producto de A, Δ es igual al cuadrado de B. Así pues, como A es a B, así B a Δ [VII, 19]. Por tanto, se ha hallado el número Δ tercero proporcional a A, B.

Pero ahora no mida A a Γ.

Digo que es imposible hallar un número tercero proporcional a A, B.

Pues, si fuera posible, hállese el número Δ (como tercero proporcional). Entonces el producto de A, Δ es igual al cuadrado de B. Pero el cuadrado de B es Γ, luego el producto de A, Δ es igual a Γ. De modo que A, al multiplicar a Δ, ha

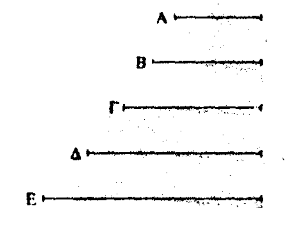
hecho Γ. Por tanto, A mide a Γ según Δ. Pero se ha supuesto que no lo mide; lo cual es absurdo.

Por consiguiente, no es posible hallar un número tercero proporcional a A, B cuando A no mide a Γ. Q. E. D.

Proposición 19

Dados tres números, investigar cuándo es posible hallar un cuarto proporcional a ellos.

Sean A, B, Γ los tres números dados y sea lo requerido investigar cuándo es posible hallar un cuarto proporcional a ellos.



Pues bien, o no son continuamente proporcionales y sus extremos son primos entre sí, o son continuamente proporcionales y sus extremos no son primos entre sí, o ni son continuamente proporcionales ni sus extremos son primos entre sí, o son continuamente proporcionales y sus extremos son primos entre sí.

Si, en efecto, A, B, Γ son continuamente proporcionales y sus extremos A, Γ son primos entre sí, se ha demostrado que es imposible hallar un número cuarto proporcional a ellos [IX, 17]. No sean ahora A, B, Γ continuamente proporcionales, siendo sus extremos, a su vez, primos entre sí.

Digo que, en este caso, también es imposible hallar un cuarto proporcional a ellos.

Pues, si fuera posible, hállese Δ, de modo que como A es a B, así Γ a Δ. Y resulte que, como B es a Γ, así Δ a E, y dado

que, como A es a B, Γ es a Δ, y como B es a Γ, Δ es a E, entonces, por igualdad, como A es a Γ, Γ es a E [VII, 14]. Pero A, Γ son primos, y los primos son los menores [VII, 21] y los menores miden a los que guardan la misma razón, el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]. Entonces, A mide a Γ como antecedente a antecedente. Pero también se mide a sí mismo. Entonces, A mide a A, Γ, que son primos entre sí, lo cual es imposible. Así pues, no es posible hallar un cuarto proporcional a A, B, Γ.

Ahora sean A, B, Γ continuamente proporcionales pero no sean sus extremos primos entre sí.

Digo que es posible hallar un cuarto proporcional a ellos. Pues haga B, al multiplicar a Γ, el (número) Δ; entonces A o mide a Δ o no lo mide. En primer lugar mídalo según E; entonces A, al multiplicar a E, ha hecho el (número) Δ.

Pero, en efecto, B, al multiplicar a Γ, ha hecho también el (número) Δ; entonces el producto de A, E es igual al producto de B, Γ. Luego, proporcionalmente, como A es a B, Γ es a E [VII, 19]; por tanto, se ha hallado el cuarto proporcional E de A, B, Γ.

Pero ahora no mida A a Δ.

Digo que es imposible hallar un número cuarto proporcional a A, B, Γ. Pues, si fuera posible, hállese E; entonces, el producto de A, E es igual al producto de B, Γ [VII, 19]. Pero el producto de B, Γ es Δ; luego el producto de A, E es igual a Δ. Por tanto, A, al multiplicar a E, ha hecho el (número) Δ. Entonces A mide a Δ según E; de modo que A mide a Δ. Pero asimismo no lo mide; lo cual es absurdo. Así pues, no es posible hallar un número cuarto proporcional a A, B, Γ, cuando A no mide a Δ.

Pero ahora, ni sean A, B, Γ continuamente proporcionales, ni sus extremos primos entre sí. Y haga B, al multiplicar

a Γ, el (número) Δ. De manera semejante se demostraría que, si A mide a Δ, es posible hallar un cuarto proporcional a ellos, pero, si no lo mide, es imposible. Q. E. D.[121].

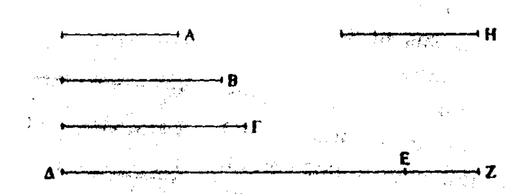
PROPOSICIÓN 20

Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos.

Sean A, B, Γ los números primos propuestos.

Digo que hay más números primos que A, B, Γ.

Pues tómese el número menor medido por A, B, Γ y sea ΔE y añádase a ΔE la unidad EZ. Entonces EZ o es primo o



no. Sea primo en primer lugar; entonces han sido hallados los números primos A, B, Γ, EZ, (que son) más que A, B, Γ.

---

[121] Euclides presenta cuatro casos:

a) $a : b \neq b : c$, siendo a y c primos entre si.

b) $a : b :: b : c$, no siendo a y c primos entre sí.

c) $a : b \neq b : c$, no siendo a y c primos entre sí.

d) $a : b :: b : c$, siendo a y c primos entre sí.

La prueba del «caso *a*» que se presenta en segundo lugar en esta proposición es incorrecta (cf. HEATH, ed. cit., pág. 411, e ITARD, ed. cit., pág. 185).

En todo caso y en el presente contexto de la razón aritmética euclidea, la condición suficiente para que se pueda hallar un cuarto proporcional a A, B, Γ es que A mida a B, Γ

Pero ahora no sea primo EZ; entonces es medido por algún número primo [VII, 31]: sea medido por el número primo H.

Digo que H no es el mismo que ninguno de los números A, B, Γ. Pues, si fuera posible, séalo. Pero A, B, Γ miden a ΔE; entonces H medirá también a ΔE. Pero mide asimismo a EZ; y H, siendo un número, medirá también a la unidad restante ΔZ; lo cual es absurdo. Luego H no es el mismo que ninguno de los (números) A, B, Γ. Y se ha supuesto que es primo. Por consiguiente, han sido hallados más números primos que la cantidad propuesta de los (números) A, B, Γ. Q. E. D.[122].

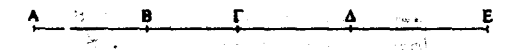
Proposición 21

Si se suman tantos números pares como se quiera, el total es par.

Súmense pues AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, tantos números pares como se quiera.

Digo que el total AE es par.

Pues como cada uno de los (números) AB, BΓ, ΓΔ, ΔE es par, tiene una mitad [VII, Def. 6]; de modo que también el



total AE tiene una mitad. Pero un número par es el que se divide en dos partes iguales [VII, Def. 6].

[122] Esta proposición tiene gran interés, pues establece que el conjunto de números primos es infinito.

Por consiguiente, AE es par. Q. E. D. [123].

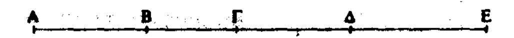
PROPOSICIÓN 22

Si se suman tantos números impares como se quiera y su cantidad es par, el total será par.

Súmense, pues, AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, tantos números impares como se quiera, en cantidad par.

Digo que el total AE es par.

Pues, como cada uno de los (números) AB, BΓ, ΓΔ, ΔE es impar, si se quita una unidad de cada uno, cada uno de los



restantes será par [VII, Def. 7]; de modo que también la suma de ellos será par [IX, 21]. Pero también la cantidad de unidades es par.

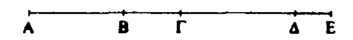
Por consiguiente, el total AE es par. Q. E. D.

[123] Esta proposición y las siguientes parecen recoger la teoría pitagórica del par/impar. Las pruebas suponen tácitamente algunas propiedades de la adición, como la conmutatividad o la asociatividad. El venerable legado pitagórico ha sido reconstruido sobre la base de ias conjeturas avanzadas por O. BECKER: «Die lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der euklidischen *Elemente*», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathem., Astron. u. Physik*, Abt. B 3 (1936), 533-553. Puede verse un panorama de los resultados y problemas inherentes a su reconstrucción en W. R. KNORR, *The Evolution of Euclidean Elements*, Dordrecht/Boston, 1975, págs. 131-169 en particular, y «Problems in the interpretation of Greek number theory», *Studies in History and Philosophy of Science* 7 (1976), 353-368.

PROPOSICIÓN 23

Si se suman tantos números impares como se quiera y su cantidad es impar, también el total será impar.

Súmense, pues, AB, BΓ, ΓΔ, tantos números impares como se quiera cuya cantidad sea impar.



Digo que también el total AΔ será impar.

Quítese de ΓΔ la unidad ΔE; entonces el resto ΓE es par [VII, Def. 7]. Pero también ΓA es par [IX, 22]. Ahora bien, ΔE es una unidad.

Por consiguiente, AΔ es impar [VII, Def. 7]. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 24

Si de un número par se quita un número par, el resto será par.

Quítese, pues, del (número) par AB el (número) par BΓ.

Digo que el resto ΓA es par.

Pues como AB es par, tiene una mitad [VII, Def. 6]; por lo mismo, BΓ tiene también una mitad; de modo que el resto ΓA [tiene también una mitad.

Por consiguiente], AΓ es par. Q. E. D.

Proposición 25

Si de un número par se quita un número impar, el resto será impar.

Quítese, pues, del número par AB el (número) impar BΓ. Digo que el resto ΓA es impar.

Quítese, pues, de BΓ la unidad ΓΔ; entonces ΔB es par [VII, Def. 7]. Pero también AB es par; así pues, el resto AΔ es par [IX, 24]. Ahora bien, ΓΔ es una unidad.

A Γ Δ B

Por consiguiente, ΓA es impar [VII, Def. 7]. Q. E. D.

Proposición 26

Si de un número impar se quita un número impar, el resto será par.

Quítese, pues, del número impar AB el número impar BΓ. Digo que el resto ΓA es par.

Pues como AB es impar, quítese la unidad BΔ; entonces el resto AΔ es par [VII, Def. 7].

A Γ Δ B

Por lo mismo, ΓΔ también es par [VII, Def. 7]; de modo que también el resto ΓA es par [IX, 24]. Q. E. D.

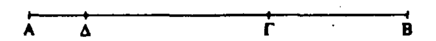
Proposición 27

Si de un número impar se quita un número par, el resto será impar.

Quítese, pues, del (número) impar AB el (número) par BΓ.

Digo que el resto ΓA es impar.

Pues quítese la unidad AΔ; entonces ΔB es par [VII, Def.



7]. Pero BΓ también es par; entonces el resto también es par [IX, 24].

Por consiguiente, ΓA es impar. Q. E. D.

Proposición 28

Si un número impar, al multiplicar a un número par, hace algún (número), el producto será par.

Haga pues el (número) impar A, al multiplicar al (número) par B, el (número) Γ.

Digo que Γ es par.

A
B
Γ

Pues como A, al multiplicar a B, ha hecho el (número) Γ, entonces Γ se compone de tantos (números) iguales a B como unidades hay en A [VII, Def. 16]. Ahora bien, B es par; entonces Γ se compone de (números)

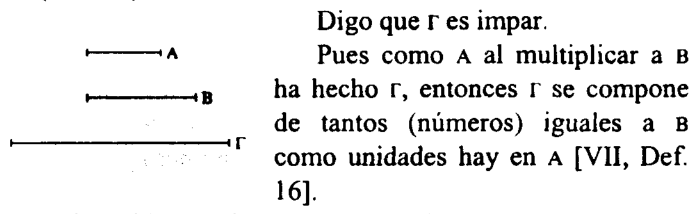
pares. Pero, si se suman tantos números pares como se quiera, el total es par [IX, 21].

Por consiguiente, Γ es par. Q. E. D.

Proposición 29

Si un número impar, al multiplicar a un número impar, hace algún (número), el producto será impar.

Haga pues el número impar A, al multiplicar al impar B, el (número) Γ.



Digo que Γ es impar.

Pues como A al multiplicar a B ha hecho Γ, entonces Γ se compone de tantos (números) iguales a B como unidades hay en A [VII, Def. 16].

Ahora bien, cada uno de los (números) A, B es impar; por tanto, Γ se compone de números impares cuya cantidad es impar, de modo que Γ es impar [IX, 23]. Q. E. D.

Proposición 30

Si un número impar mide a un número par, también medirá a su mitad.

Mida, pues, el número impar A al número par B.

Digo que también medirá a su mitad.

Pues como A mide a B, mídalo según Γ.

Digo que Γ no es impar.

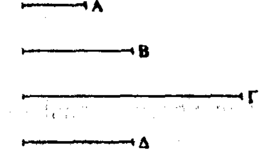
Pues, si fuera posible, séalo.

Y, dado que A mide a B según Γ, entonces A, al multiplicar a Γ, ha hecho B. Luego B se compone de números impares cuya cantidad es impar. Por tanto, B es impar [IX, 23]; pero se ha supuesto que es par. Entonces Γ no es impar; luego Γ es par. De modo que A mide a B un número par de veces. Por eso, también medirá a su mitad. Q. E. D.

Proposición 31

Si un número impar es primo con respecto a algún número, también será primo con respecto al doble.

Pues sea el número impar A primo con respecto al número B y sea Γ el doble de B.



Digo que A es primo con respecto a Γ.

Pues, si no son primos, un número los medirá. Mídalos y sea Δ. Ahora bien, A es impar; entonces Δ también es impar. Y como Δ siendo impar mide a Γ, y Γ es par, entonces medirá también a la mitad de Γ [IX, 30]. Pero la mitad de Γ es B. Entonces Δ mide también a B. Pero también mide a A. Entonces Δ mide a A, B, que son primos entre sí; lo cual es imposible. Por tanto, no es el caso de que A no sea primo con respecto a Γ. Por consiguiente, A, Γ son primos entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 32

Cada uno de los números duplicados (sucesivamente) a partir de una díada es sólo parmente par.

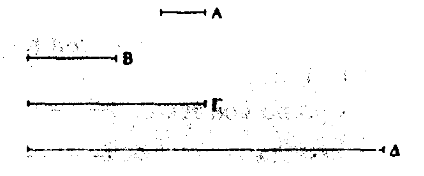
Sean B, Γ, Δ tantos números como se quiera resultado de duplicar (sucesivamente) la díada A.

Digo que B, Γ, Δ son sólo parmente pares.

En efecto, está claro que cada uno de los (números) B, Γ, Δ son parmente pares: porque han sido duplicados a partir de una díada.

Digo también que sólo (son parmente pares).

Póngase pues una unidad. Así pues, dado que tantos números como se quiera a partir de una unidad son continua-



mente proporcionales y A, el siguiente a la unidad, es primo, entonces Δ, el mayor de los (números) A, B, Γ, Δ, no es medido por ninguno fuera de A, B, Γ [IX, 13]. Ahora bien, cada uno de los (números) A, B, Γ es par; entonces Δ es sólo parmente par [VII, Def. 8]. De manera semejante demostraríamos que cada uno de los números B, Γ sólo es parmente par. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 33

Si un número tiene su mitad impar es sólo parmente impar.

Pues tenga el número A su mitad impar.

Digo que A es sólo parmente impar.

En efecto, está claro que es parmente impar: porque, siendo su mitad impar, lo mide un número par de veces [VII, Def. 9].

Digo además que es sólo (parmente impar).

Porque si A es también parmente par, será medido por un número par según un número par [VII, Def. 8]; de modo que también su mitad será medida por un número par siendo impar; lo cual es absurdo.

Por consiguiente, A es sólo parmente impar. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 34

Si un número no es uno de los duplicados (sucesivamente) a partir de una díada, ni tiene su mitad impar, es parmente par y parmente impar.

Pues no sea el número A uno de los duplicados a partir de una díada ni tenga su mitad impar.

Digo que A es parmente par y parmente impar.

En efecto, está claro que A es parmente par: porque no tiene su mitad impar [VII, Def. 8].

Digo además que también es parmente impar.

A

Pues, si dividimos A en dos partes iguales y también su mitad en dos partes iguales y hacemos eso sucesivamente, llegaremos a un número impar que medirá a A según un número par.

Porque, si no, llegaremos a una díada y A será uno de los duplicados a partir de una díada; lo cual precisamente se ha supuesto que no. De modo que A es parmente impar. Pero se ha demostrado que también es parmente par.

Por consiguiente, A es parmente par y parmente impar. Q. E. D.[124].

Proposición 35

Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales, y se quitan del segundo y del último (números) iguales al primero, entonces, como el exceso del segundo es al primero, así el exceso del último será a todos los anteriores a él.

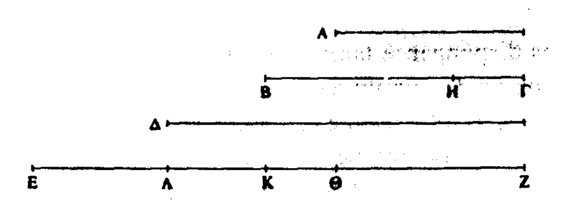
Sean A, BΓ, Δ, EZ tantos números como se quiera continuamente proporcionales empezando por el menor A, y quítense de BΓ y de EZ los (números) BH, ZΘ iguales respectivamente a A.

Digo que como HΓ es a A, así EΘ a A, BΓ, Δ.

Pues háganse ZK igual a BΓ y ZΛ igual a Δ. Y como ZK es igual a BΓ y su parte ZΘ es igual a BH, entonces el resto ΘK

[124] Cf. nota 73.

es igual al resto ΗΓ. Ahora bien, dado que como ΕΖ es a Δ, así Δ a ΒΓ y ΒΓ a Α, y Δ es igual a ΖΛ, mientras que ΒΓ es



igual a ΖΚ y Α a ΖΘ, entonces, como ΕΖ es a ΖΛ, así ΛΖ a ΖΚ y ΖΚ a ΖΘ. Por separación, como ΕΛ es a ΛΖ, así ΛΚ a ΖΚ y ΚΘ a ΖΘ [VII, 11, 13]. Entonces también, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes a todos los consecuentes [VII, 12]; por tanto, como ΚΘ es a ΖΘ, así ΕΛ, ΛΚ, ΚΘ a ΛΖ, ΖΚ, ΘΖ. Pero ΚΘ es igual a ΓΗ, mientras que ΖΘ es igual a Α, y ΛΖ, ΖΚ, ΘΖ a Δ, ΒΓ, Α. Luego como ΓΗ es a Α, así ΕΘ a Δ, ΒΓ, Α.

Por consiguiente, como el exceso del segundo es al primero, así el exceso del último a todos los anteriores a él. Q. E. D.[125].

Proposición 36

Si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su

[125] Ésta es probablemente la más interesante de las proposiciones aritméticas, puesto que ofrece un método para sumar cualquier serie de términos en progresión geométrica. La proposición prueba que:

$$(a_{n+1} - a_1) : (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) :: (a_2 - a_1) : a_1$$

para una progresión geométrica cuyos términos sean:

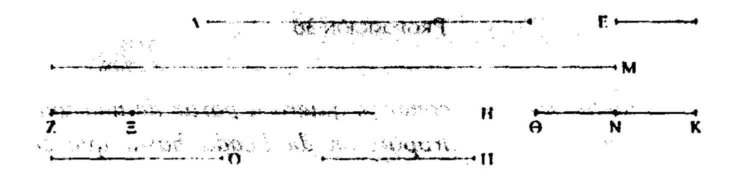
$$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, a_{n+1}$$

(suma) total resulte (un número) primo, y el total multiplicado por el último produce algún número, el producto será (un número) perfecto.

Pues dispónganse tantos números como se quiera, A, B, Γ, Δ, a partir de una unidad en proporción duplicada hasta que su (suma) total resulte (un número) primo, y sea E igual al total, y E, al multiplicar a Δ, haga ZH.

Digo que ZH es un (número) perfecto.

Pues cuantos números son en cantidad A, B, Γ, Δ, tómense tantos números E, ΘK, Λ, M en proporción duplicada a partir de E; entonces, por igualdad, como A es a Δ, así E a M [VII, 14]. Así pues, el producto de E, Δ es igual al (producto) de A, M [VII, 19]. Ahora bien, el producto de E, Δ es ZH; entonces el (producto) de A, M es también ZH. Luego A, al multiplicar a M, ha hecho ZH; por tanto, M mide a ZH según las unidades de A. Pero A es una díada; luego ZH es el doble de M. Pero M, Λ, ΘK, E son sucesivamente el doble uno de otro; entonces E, ΘK, Λ, M, ZH son continuamente proporcionales en proporción duplicada.



Ahora, del segundo ΘK y del último ZH quítense ΘN, ZΞ respectivamente iguales a E. Entonces, como el exceso del segundo número es al primero, así es el exceso del último a todos los anteriores a él [IX, 35]. Así pues, como NK es a E,

así ΞH a M, Λ, KΘ, E. Y NK es igual a E; entonces ΞH también es igual a M, Λ, ΘK, E. Pero ZΞ también es igual a E, y E a A, B, Γ, Δ y la unidad. Así pues, el total ZH también es igual a los (números) E, ΘK, Λ, M y a los (números) A, B, Γ, Δ y la unidad; y es medido por ellos.

Digo que ZH no será medido por ningún otro fuera de A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M y la unidad. Pues, de ser posible, mida un número O a ZH, y no sea O el mismo que ninguno de los números A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M. Y cuantas veces O mida a ZH, tantas unidades haya en Π; entonces Π, al multiplicar a O, ha hecho ZH. Pero, en efecto, E, al multiplicar a Δ, ha hecho también ZH; entonces, como E es a Π, O es a Δ [VII, 19]. Y puesto que A, B, Γ, Δ son continuamente proporcionales a partir de una unidad, entonces Δ no será medido por ningún otro fuera de A, B, Γ [IX, 13]. Ahora bien, se ha supuesto que O no es el mismo que ninguno de los (números) A, B, Γ; por tanto, O no medirá a Δ. Pero, como O es a Δ, E es a Π; entonces E tampoco mide a Π [VII, Def. 21]. Y E es primo. Pero todo número primo es primo con respecto a todo aquel al que no mide [VII, 29]. Así pues, E, Π son primos entre sí. Pero los primos son también los menores [VII, 21] y los menores miden a los que guardan la misma razón que ellos el mismo número de veces, el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente [VII, 20]; ahora bien, como E es a Π, O es a Δ; entonces, E mide a O el mismo número de veces que Π a Δ. Pero Δ no es medido por ningún otro fuera de A, B, Γ; luego Π es el mismo que uno de los (números) A, B, Γ. Sea el mismo que B y cuantos son B, Γ, Δ en cantidad tómense tantos E, ΘK, Λ a partir de E. Ahora bien, E, ΘK, Λ guardan la misma razón que B, Γ, Δ; entonces, por igualdad, como B es a Δ, E es a Λ [VII, 14]. Luego el (producto) de B, Λ es igual al (producto) de Δ, E [VII, 19]; pero el (producto) de Δ, E es igual al (producto) de Π, O; entonces el

(producto) de Π, O es igual al (producto) de B, Λ. Luego como Π es a B, Λ es a O [VII, 19]. Pero Π es el mismo que B; entonces Λ es el mismo que O; lo cual es imposible, porque se ha supuesto que O no era el mismo que ninguno de los (números) puestos, luego ningún número medirá a ZH fuera de A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M y la unidad. Y se ha demostrado que ZH es igual a A, B, Γ, Δ, E, ΘK, M y la unidad. Pero un número perfecto es el que es igual a sus propias partes [VII, Def. 23].

Por consiguiente, ZH es un (número) perfecto. Q. E. D.[126].

---

[126] Si la suma de un número cualquiera de términos de una serie $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ es un número primo y se multiplica por el último término, el producto será un número perfecto.

Teón de Esmirna y Nicómaco definen el número perfecto y dan la ley para su formación. Por otra parte, Euclides y Teón de Esmirna sólo mencionan los dos primeros números perfectos: $2(2^2-1) = 6$ y $2^2(2^3-1) = 28$; Nicómaco explicita los dos siguientes: $2^4(2^5-1) = 496$ y $2^6(2^7-1) = 8.128$; el quinto fue calculado por Jámblico: $2^{12}(2^{13}-1) = 33.550.336$ (se halla en el ms. Latino Monac. 14.908). Los siguientes se fueron determinando mucho más tarde, a partir del siglo XVI.

ÍNDICE GENERAL



ELEMENTOS

BIBLIOTECA CLÁSICA GREDOS, 228

EUCLIDES

ELEMENTOS

LIBROS X-XIII

TRADUCCIÓN Y NOTAS DE
MARÍA LUISA PUERTAS CASTAÑOS



EDITORIAL GR

Asesor para la sección griega: Carlos García Gual.

Según las normas de la B. C. G., la traducción de este volumen ha sido revisada por Paloma Ortiz.



Depósito Legal: M. 35819-1996.

ISBN 84-249-1463-5. Obra completa.
ISBN 84-249-1830-4. Tomo III.

Impreso en España. Printed in Spain.
Gráficas Cóndor, S. A.
Esteban Terradas, 12. Polígono Industrial. Leganés (Madrid), 1996.

NOTA DE LA TRADUCTORA

Esta entrega de los libros X-XIII completa la traducción de los *Elementos* de Euclides. Mantengo naturalmente el texto griego de referencia y las convenciones que he empleado en las entregas anteriores —véase la nota inicial sobre la traducción de los libros I-IV (Madrid: Gredos [B.C.G. 155], 1991) y V-IX (Madrid: Gredos [B.C.G. 191], 1994).

En el presente caso, el libro X ha seguido siendo la «cruz» de los *Elementos* y, desde luego, una cruz para la traductora. Por fortuna, durante los primeros meses de 1993 pude contar con la paz, las facilidades y los incentivos de Cambridge para dar forma a un primer borrador de la traducción de este libro. Entre esas facilidades e incentivos quiero destacar especialmente la generosidad de Geoffrey Lloyd quien, además, me brindó la oportunidad de hablar de algunos aspectos del libro con los profesores Ian Mueller y David H. Fowler en sus visitas a Cambridge. Una consecuencia ha sido mi opción por traducir el término crucial *álogon* no en la versión tradicional de «irracional», sino en otra versión más contextualizada y explícita, como «no racionalmente expresable», alternativa que no deja de tener repercusiones sobre la interpretación del propósito y del sentido de este espinoso libro X en el marco del tratado. También me parece justo recordar que sin el estímulo y la asistencia de Luis Vega a lo largo de las sucesivas versiones y

correcciones que han ido conformando esta traducción de los *Elementos* y sin sus contribuciones a las notas, la suerte de la empresa habría sido mucho más aventurada. Espero, cuando menos, que la presente edición venga a cumplir el compromiso pendiente en nuestra lengua con esta obra clásica desde la ya lejana traducción inaugural de Rodrigo Zamorano (1576).

LIBRO DÉCIMO

DEFINICIONES

1. Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible que haya una medida común.
2. Las líneas rectas son conmensurables en cuadrado cuando sus cuadrados se miden con la misma área, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan un área como medida común [1].

---

[1] Traduzco por «conmensurables en cuadrado» la expresión *dynámei sýmmetroi.* El término *dýnamis* corre la misma suerte que otras muchas expresiones matemáticas griegas: además de la riqueza de sentidos con que cuenta en el uso ordinario, adquiere diversos significados específicos en distintos contextos especializados. Su sentido característico en matemáticas suele ser el que corresponde a la operación o resultado de elevar a la segunda potencia, al cuadrado. Este sentido, cuyo paradigma es el cuadrado construido sobre una recta dada, es el pertinente en los *Elementos.* Cuando aquí se habla de magnitudes conmensurables en cuadrado, las razones consideradas median no entre las magnitudes nombradas sino entre las magnitudes que se derivan de ellas por esa operación. Para comparar, *e. g.*, dos líneas «en cuadrado», Euclides considera las razones de los cuadrados construídos sobre las líneas en cuestión.

Por otro lado, según hará notar un porisma de la proposición X, 9 *(infra),* todas las rectas conmensurables en longitud *(mêkei)* son conmensurables en

correcciones que han ido conformando esta traducción de los *Elementos* y sin sus contribuciones a las notas, la suerte de la empresa habría sido mucho más aventurada. Espero, cuando menos, que la presente edición venga a cumplir el compromiso pendiente en nuestra lengua con esta obra clásica desde la ya lejana traducción inaugural de Rodrigo Zamorano (1576).

LIBRO DÉCIMO

DEFINICIONES

1. Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible que haya una medida común.
2. Las líneas rectas son conmensurables en cuadrado cuando sus cuadrados se miden con la misma área, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan un área como medida común [1].

---

[1] Traduzco por «conmensurables en cuadrado» la expresión *dynámei sýmmetroi.* El término *dýnamis* corre la misma suerte que otras muchas expresiones matemáticas griegas: además de la riqueza de sentidos con que cuenta en el uso ordinario, adquiere diversos significados específicos en distintos contextos especializados. Su sentido característico en matemáticas suele ser el que corresponde a la operación o resultado de elevar a la segunda potencia, al cuadrado. Este sentido, cuyo paradigma es el cuadrado construido sobre una recta dada, es el pertinente en los *Elementos.* Cuando aquí se habla de magnitudes conmensurables en cuadrado, las razones consideradas median no entre las magnitudes nombradas sino entre las magnitudes que se derivan de ellas por esa operación. Para comparar, *e. g.*, dos líneas «en cuadrado», Euclides considera las razones de los cuadrados construídos sobre las líneas en cuestión.

Por otro lado, según hará notar un porisma de la proposición X, 9 *(infra)*, todas las rectas conmensurables en longitud *(mêkei)* son conmensurables en

3. Dados estos supuestos, se demuestra que hay un número infinito de rectas respectivamente conmensurables e inconmensurables, unas sólo en longitud y otras también en cuadrado con una recta determinada. Llámese entonces racionalmente expresable la recta determinada; y las conmensurables con ella, bien en longitud y en cuadrado, bien sólo en cuadrado, racionalmente expresables y las inconmensurables con ella llámense no racionalmente expresables [2].

---

cuadrado; pero no todas las rectas conmensurables en cuadrado, lo son en longitud. Para señalar este segundo caso, Euclides emplea la expresión «conmensurables sólo en cuadrado *(sýmmetroi dynámei mónon)*». Resultan, en suma, estas relaciones: si las magnitudes consideradas (unas rectas dadas) son conmensurables en longitud, también lo son en cuadrado; por tanto, si son inconmensurables en cuadrado, también lo son en longitud; ahora bien, no valen las respectivas conversas, de modo que pueden ser conmensurables en cuadrado, pero no en longitud, y por ende inconmensurables en longitud, pero no en cuadrado.

[2] Las expresiones «racionalmente expresable» y «no racionalmente expresable» traducen respectivamente *rhētós* y *álogos*. Una versión más literal como «expresable *(rhētós)*» y «sin razón *(álogos)*» no trasluce el papel de estos términos como antónimos en el presente contexto matemático. Por ende parece más indicada una versión del tenor de «con razón expresable» / «sin razón expresable»; las expresiones aquí empleadas son una variante preferible por motivos simplemente estilísticos. Con todo, esta versión es un tanto insólita y desafía los usos y costumbres vigentes en la tradición que los vierte por «racional» e «irracional», sin más. Mi versión responde a estos motivos: (1) Trato de evitar las connotaciones habituales en nuestro par «racional / irracional», que llevan a pensar en números y a dar, subrepticiamente, un sesgo aritmético al libro X. (2) A esta indebida aritmetización se añade la circunstancia de que «racionalmente expresable *(rhētós)*» cobra en Euclides un sentido más amplio que nuestro «racional» y, por correspondencia, el sentido de «no racionalmente expresable *(álogos)*» deviene más restringido que «irracional»: sólo carecen de razón expresable las rectas que resultan inconmensurables tanto en longitud como en cuadrado con una recta designada —implícitamente por lo regular— como referencia o parámetro de «expresabilidad racional».

4. Y el cuadrado de la recta determinada (llámese) racionalmente expresable, y los cuadrados conmensurables con éste racionalmente expresables; pero los inconmensurables con él llámense no racionalmente expresables; y las

---

(3) Aunque no han faltado intentos de reducir el complejo libro X a un lenguaje algebraico más familiar, la interpretación más congruente con el planteamiento de los *Elementos* es la que mantiene su carácter irreduciblemente geométrico. Así que tampoco por esta vía reductiva parece aconsejable la versión tradicional: «racional», «irracional». Sólo cabría, en suma, servirse de estos términos como de una especie de abreviaturas dentro del marco de los supuestos (1)-(3) y sin perder de vista que la matemática griega clásica carece de nuestro concepto de número real, de modo que no comparte nuestro contexto habitual de uso de los términos «racional» e «irracional» en matemáticas.

Este punto guarda relación con el problema general de la interpretación del libro X, que arrastra desde Simon Stevin (1585) el apelativo de «cruz de los matemáticos» —sobre el sentido que puede tener aún esta denominación, cf. «Introducción general» en el primer tomo, *Elementos. Libros I-IV,* págs. 88-89—. Dada la complicada y oscura organización del libro, no faltan propuestas sobre su motivación y su sentido. Por ejemplo, según B. L. VAN DER WAERDEN *(Science Awakening,* Nueva York, 1963, edic. rev.), el libro responde al problema de determinar cuándo la raíz de ciertas líneas irracionales es un irracional del mismo tipo (págs. 168-172), y sigue una línea puramente algebraica de pensamiento (pág. 178). Según I. MUELLER *(Philosophy of Mathematics..., op. cit.* en la «Introducción general», pág. 184), el libro carece de una motivación intuitiva clara y parece dedicado a elaborar una clasificación de líneas irracionales en respuesta al problema de la construcción del icosaedro en XIII, 16. C. M. TAISBAK *(Coloured Quadrangles,* citado en «Introducción general», nota 27, págs. 88-89), el libro X se centra en el estudio de las relaciones entre los lados y diagonales del decágono, el hexágono y el pentágono regulares con el diámetro del círculo circunscrito, conforme a un determinado patrón de conmensurabilidad/inconmensurabilidad. Esta interpretación es sostenida por D. H. FOWLER *(The Mathematics of Plato's Academy,* cit. íbidem; «An Invitation to Read Book X of Euclid's *Elements*», *Historia Mathematica* 19 (1992), 233-264). En una línea similar se mueve la interpretación de W. R. KNORR («La croix des mathématiciens...», cit. íbidem), aunque tiende a marcar el acento sobre el caso del pentágono regular. En todo caso, creo que la lectura geométrica en la que convienen Taisbak, Fowler y Knorr es la que mejor cuadra con el

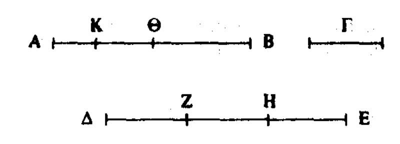
rectas que los producen (llámense) no racionalmente expresables, a saber, si fueran cuadrados, los propios lados y si fueran otras figuras rectilíneas, aquellas (rectas) que construyan cuadrados iguales a ellos [3].

Proposición 1

Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Sean AB, Γ dos magnitudes desiguales de las cuales AB es la mayor.

Digo que, si se quita de AB una (magnitud) mayor que su mitad y de la (magnitud) restante, una (magnitud) mayor que su mitad, y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud Γ.



Pues Γ multiplicada será alguna vez mayor que AB [V Def. 4]. Multiplíquese y sea ΔE un múltiplo de Γ mayor que AB; divídase ΔE en ΔZ, ZH, HE

planteamiento del libro y con su lugar de encrucijada en los *Elementos*. Por lo demás, en los trabajos citados hay cuadros y esquemas de las diversas clasificaciones de rectas con o sin razón expresable, que resumen los resultados del libro y que no puedo recoger aquí.

[3] Un área resulta «racionalmente expresable» o «no racionalmente expresable» según sea conmensurable o no con el cuadrado de una recta predeterminada como expresable. La misma condición se extiende bien a sus lados, si el área en cuestión es un cuadrado, o bien a los lados de un cuadrado de área igual, si se trata de otra figura.



iguales a Γ, y de AB quítese BΘ mayor que su mitad, y de AΘ (quítese) ΘK mayor que su mitad, y así sucesivamente hasta que las divisiones de AB lleguen a ser iguales en número a las divisiones de ΔE.

Sean, pues, AK, KΘ, ΘB divisiones que son iguales en número a las (divisiones) ΔZ, ZH, HE; ahora bien, dado que ΔE es mayor que AB y que de ΔE se ha quitado la (magnitud) EH menor que su mitad y de AB la (magnitud) BΘ mayor que su mitad, entonces la magnitud restante HΔ es mayor que la (magnitud) restante ΘA. Y dado que HΔ es mayor que ΘA y se ha quitado de HΔ su mitad HZ y de ΘA una (magnitud) ΘK mayor que su mitad, entonces la (magnitud) restante ΔZ es mayor que la (magnitud) restante AK. Pero ΔZ es igual a Γ; luego es mayor que AK. Por tanto, AK es menor que Γ.

Por consiguiente, de la magnitud AB queda la magnitud AK que es menor que la magnitud dada Γ. Q. E. D. De manera semejante demostraríamos que (esto ocurre) también si se quita la mitad [4].

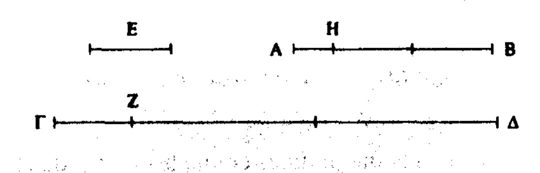
Vierto *hai dynámenai* como «las rectas que los producen». *Dynaménē* suele traducirse por «raíz cuadrada», pero esta versión incurre en el sesgo aritmético ya denunciado. Así que prefiero mantener la referencia al lado (base) del cuadrado producido. Sobre la expresión *tetrágōna anagráphousai* («rectas que construyen cuadrados»), cf. nota 61 del libro I en *Elementos. Libros I-IV*, pág. 259.

[4] Este teorema reviste especial importancia aunque apenas preste servicio hasta las proposiciones del libro XII que emplean el llamado «método de exhausción». Su situación aquí puede justificarse como paso previo a X, 2, donde se muestra el procedimiento para determinar si dos magnitudes son conmensurables o inconmensurables. El relieve de X, 1 descansa en su papel como principio básico del método ya mencionado de «exhausción». Se asemeja a la quinta asunción de Arquímedes en *Sobre la esfera y el cilindro* y recuerda así mismo un lema del propio Arquímedes en *La cuadratura de la parábola*. Reza el lema: «El exceso de la mayor de dos áreas desiguales sobre la menor (es una magnitud que) puede sobrepasar, si es añadida a sí misma

Proposición 2

Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.

Habiendo, pues, dos magnitudes desiguales AB, ΓΔ y (siendo) AB la menor, al restar sucesivamente la menor de la mayor, no mida nunca la (magnitud) restante a la anterior a ella.



(cuantas veces se requiera), cualquier área finita dada». Y a renglón seguido dice Arquímedes que los geómetras anteriores no dejaron de apelar a este lema, pues fue a través de él como establecieron que los círculos guardan entre sí la razón de los cuadrados de sus diámetros (XII 2), las esferas guardan entre sí la razón de los cubos de sus diámetros (XII 18), toda pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma con la misma base y altura (XII 7) y todo cono es equivalente a la tercera parte de un cilindro con la misma base y altura (XII 10) —cf. *La cuadratura de la parábola*, prefacio a Dositeo, edic. Ch. Mugler, París, 1971; t. II, 165.6-18—. Esa referencia al uso anterior del lema halla confirmación en algunas alusiones de Aristóteles en análogo sentido (*Física*, 266b2, 207b10). Todo ello apunta a Eudoxo: es probable que un supuesto similar a X 1 ya hubiera obrado en algunos de esos resultados de Eudoxo recogidos por Euclides en el libro XII. Pero un supuesto *similar* no es el *mismo* supuesto. La asunción y el lema de Arquímedes, a quien suele suponerse más respetuoso con Eudoxo que con el propio Euclides, hacen referencia a la adición, mientras que Euclides se atiene a la sustracción, en la perspectiva del algoritmo antifairético de sustracción recíproca, y prefiere operar —al menos en principio— en términos de bisecciones. Sobre este algoritmo recuérdense las proposiciones 2, 3 del libro VIII.

Digo que las magnitudes AB, ΓΔ son inconmensurables.

Pues, si son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas (una magnitud), si es posible, y sea E; y AB, al medir a ZΔ, deje la magnitud ΓZ menor que ella, y ΓZ, al medir a BH, deje AH menor que ella, y repítase así sucesivamente hasta que quede una magnitud que sea menor que E. Sea así y quede AH menor que E. Así pues, como E mide a AB y AB mide a ΔZ, entonces E también medirá a ZΔ. Pero mide también a la magnitud entera ΓΔ; luego medirá también a la magnitud restante ΓZ. Ahora bien, ΓZ mide a BH; entonces E también mide a BH. Pero mide también a la (magnitud) entera AB; así que medirá también a la (magnitud) restante AH, la mayor a la menor; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud medirá a las magnitudes AB, ΓΔ; por tanto, las magnitudes AB, ΓΔ son inconmensurables [X Def. 1].

Por consiguiente, si de dos magnitudes desiguales..., etc. [5].

Proposición 3

Dadas dos magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

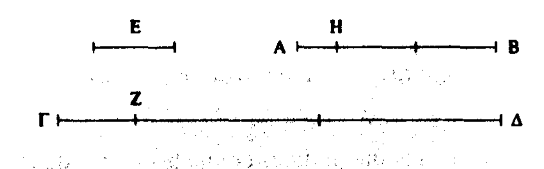
---

[5] X 2 muestra uno de los usos más metódicos —digamos— que operativos del procedimiento antifairético, *i. e.*, su uso como criterio de conmensurabilidad/inconmensurablidad. Conforme a este criterio, dos magnitudes son conmensurables si y sólo si cabe determinar efectivamente, por el procedimiento antifairético, la existencia de medida común. Por ende, siempre que la serie de sustracciones recíprocas proceda indefinidamente sin llegar a un resultado efectivo, tendremos una señal de que las magnitudes en cuestión son inconmensurables. En otras palabras, la efectividad o la no efectividad del algoritmo antifairético es una condición que determina respectivamente la conmensurabilidad o la inconmensurabilidad.

Proposición 2

Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.

Habiendo, pues, dos magnitudes desiguales AB, ΓΔ y (siendo) AB la menor, al restar sucesivamente la menor de la mayor, no mida nunca la (magnitud) restante a la anterior a ella.



(cuantas veces se requiera), cualquier área finita dada». Y a renglón seguido dice Arquímedes que los geómetras anteriores no dejaron de apelar a este lema, pues fue a través de él como establecieron que los círculos guardan entre sí la razón de los cuadrados de sus diámetros (XII 2), las esferas guardan entre sí la razón de los cubos de sus diámetros (XII 18), toda pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma con la misma base y altura (XII 7) y todo cono es equivalente a la tercera parte de un cilindro con la misma base y altura (XII 10) —cf. *La cuadratura de la parábola*, prefacio a Dositeo, edic. Ch. Mugler, París, 1971; t. II, 165.6-18—. Esa referencia al uso anterior del lema halla confirmación en algunas alusiones de Aristóteles en análogo sentido (*Física*, 266b2, 207b10). Todo ello apunta a Eudoxo: es probable que un supuesto similar a X 1 ya hubiera obrado en algunos de esos resultados de Eudoxo recogidos por Euclides en el libro XII. Pero un supuesto *similar* no es el *mismo* supuesto. La asunción y el lema de Arquímedes, a quien suele suponerse más respetuoso con Eudoxo que con el propio Euclides, hacen referencia a la adición, mientras que Euclides se atiene a la sustracción, en la perspectiva del algoritmo antifairético de sustracción recíproca, y prefiere operar —al menos en principio— en términos de bisecciones. Sobre este algoritmo recuérdense las proposiciones 2, 3 del libro VIII.

Digo que las magnitudes AB, ΓΔ son inconmensurables.

Pues, si son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas (una magnitud), si es posible, y sea E; y AB, al medir a ZΔ, deje la magnitud ΓZ menor que ella, y ΓZ, al medir a BH, deje AH menor que ella, y repítase así sucesivamente hasta que quede una magnitud que sea menor que E. Sea así y quede AH menor que E. Así pues, como E mide a AB y AB mide a ΔZ, entonces E también medirá a ZΔ. Pero mide también a la magnitud entera ΓΔ; luego medirá también a la magnitud restante ΓZ. Ahora bien, ΓZ mide a BH; entonces E también mide a BH. Pero mide también a la (magnitud) entera AB; así que medirá también a la (magnitud) restante AH, la mayor a la menor; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud medirá a las magnitudes AB, ΓΔ; por tanto, las magnitudes AB, ΓΔ son inconmensurables [X Def. 1].

Por consiguiente, si de dos magnitudes desiguales..., etc.[5].

Proposición 3

Dadas dos magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

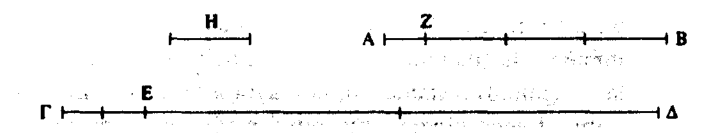
---

[5] X 2 muestra uno de los usos más metódicos —digamos— que operativos del procedimiento antifairético, *i. e.*, su uso como criterio de conmensurabilidad/inconmensurablidad. Conforme a este criterio, dos magnitudes son conmensurables si y sólo si cabe determinar efectivamente, por el procedimiento antifairético, la existencia de medida común. Por ende, siempre que la serie de sustracciones recíprocas proceda indefinidamente sin llegar a un resultado efectivo, tendremos una señal de que las magnitudes en cuestión son inconmensurables. En otras palabras, la efectividad o la no efectividad del algoritmo antifairético es una condición que determina respectivamente la conmensurabilidad o la inconmensurabilidad.

Sean AB, ΓΔ dos magnitudes dadas conmensurables, de las cuales AB sea la menor.

Así pues, hay que hallar la medida común máxima de AB, ΓΔ.

Pues bien, AB o mide a ΓΔ o no la mide. Si, en efecto, la mide y se mide también a sí misma, entonces AB es una medida común de AB, ΓΔ; y está claro que también es la mayor. Porque no medirá a AB ninguna magnitud mayor que AB.



Pero ahora no mida AB a ΓΔ y, al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor, la (magnitud) restante medirá alguna vez a la anterior a ella, porque AB, ΓΔ no son inconmensurables [X 2]; y AB, al medir a EΔ, deje la (magnitud) EΓ menor que ella, y EΓ, al medir a ZB, deje la (magnitud) AZ menor que ella y mida AZ a ΓE.

Como, en efecto, AZ mide a ΓE, mientras que ΓE mide a ZB, entonces AZ medirá también a ZB. Pero también se mide a sí misma; luego AZ medirá también a la (magnitud) entera AB. Ahora bien, AB mide a ΔE; entonces AZ medirá también a EΔ. Pero mide también a ΓE; luego mide también a la (magnitud) entera ΓΔ; por tanto, AZ es una medida común de AB, ΓΔ.

Digo ahora que también es la mayor. Pues, si no, habrá una magnitud mayor que AZ que medirá a AB, ΓΔ. Sea H. Así pues, dado que H mide a AB, mientras que AB mide a EΔ, entonces H medirá a EΔ. Pero mide también a la (magnitud) entera ΓΔ; luego H medirá también a la (magnitud) restante ΓE. Pero ΓE mide a ZB; luego H medirá también a ZB. Pero también mide a la (magnitud) entera AB y medirá también a la (magnitud) restan-

te AZ, la mayor a la menor; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud mayor que AZ medirá a AB, ΓΔ; por tanto AZ es la medida común máxima de AB, ΓΔ.

Por consiguiente, se ha hallado la medida común máxima, AZ, de las dos magnitudes dadas AB, ΓΔ. Q. E. D.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si una magnitud mide a dos magnitudes, medirá también a su medida común máxima [6].

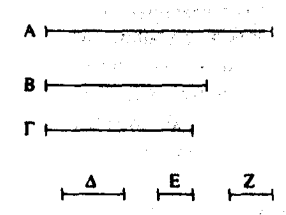
Proposición 4

Dadas tres magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

Sean A, B, Γ las tres magnitudes conmensurables dadas.

Así pues, hay que hallar la medida común máxima de A, B, Γ.

Tómese, pues, la medida común máxima de A, B y sea Δ [X 3]. Pues bien, o Δ mide a Γ o no la mide. En primer lugar, mídala. Así pues Δ mide a Γ, y mide también a A, B, entonces Δ mide a A, B, Γ; por tanto Δ es una medida común de A, B, Γ. Y está claro que también la mayor, porque una magnitud mayor que la magnitud Δ no mide a A, B.



No mida ahora Δ a Γ.

[6] X 3 aplica a las magnitudes el procedimiento empleado en VII 2 para los números. Sobre la proyección histórica y las modernas aplicaciones de este algoritmo euclídeo, cf. J. L. Chabert *et alii*, *Histoire d'algorithmes*, París, 1993; cap. 4, págs. 129-158.

Digo en primer lugar que Γ, Δ son conmensurables.

Porque como A, B, Γ son conmensurables, las medirá alguna magnitud que evidentemente medirá también a A, B; de modo que la medida común máxima de A, B medirá también a Δ. Y mide también a Γ; de modo que la antedicha magnitud medirá también a Δ, la medida común máxima de A, B [X 3 Por.], luego Γ, Δ son conmensurables.

Pues bien, tómese su medida común máxima y sea E [X 3]. Así pues, dado que E mide a Δ, mientras que Δ mide a A, B, entonces E medirá también a A, B. Pero mide también a Γ. Luego E mide a A, B, Γ; por tanto E es una medida común de A, B, Γ.

Digo ahora que también la mayor.

Pues, si es posible, sea Z una magnitud mayor que E y mida a A, B, Γ. Ahora bien, puesto que Z mide a A, B, Γ, entonces medirá también a A, B y a la medida común máxima de A, B [X 3 Por.]. Pero la medida común máxima de A, B es Δ; entonces Z mide a Δ. Pero mide también a Γ; luego Z mide a Δ. Y mide también a Γ. Por tanto Z mide a Γ, Δ; entonces Z medirá también a la medida común máxima de Γ, Δ [X 3 Por.]. Pero es E; luego Z medirá a E, la mayor a la menor; lo cual es imposible. Por tanto, ninguna (magnitud) mayor que la magnitud E mide a A, B, Γ; luego la medida común máxima de A, B, Γ es E, si Δ no mide a Γ, y si la mide, es la propia (magnitud) Δ.

Por consiguiente, se ha hallado la medida común máxima de las tres magnitudes conmensurables dadas.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si una magnitud mide a tres magnitudes, medirá también a su medida común máxima.

De manera semejante se hallará la medida común máxima de más magnitudes y se extenderá el porisma. Q. E. D. [7].

---

[7] Esta proposición, al igual que la anterior con VII 2, coincide literalmente con VII 3, sustituyendo número por magnitud.

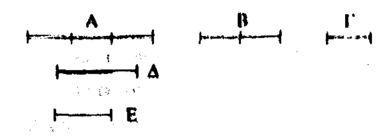
Proposición 5

Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.

Sean A, B magnitudes conmensurables.

Digo que A guarda con B la misma razón que un número con un número.

Pues, como A, B son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas una magnitud y sea Γ. Y cuantas veces Γ mida



a A, tantas unidades haya en Δ, y cuantas veces Γ mida a B, tantas unidades haya en E.

Así pues, dado que Γ mide a A según las unidades de Δ y la unidad mide a Δ según sus unidades, entonces la unidad mide al número Δ el mismo número de veces que la magnitud Γ a la (magnitud) A; luego, como Γ es a A, así la unidad es a Δ [VII Def. 20]; entonces, por inversión, como A es a Γ, así Δ a la unidad [V 7 Por.]. Como Γ mide a su vez a Δ según las unidades de E, mientras que la unidad mide también a E según sus unidades, entonces la unidad mide a E el mismo número de veces que Γ a B. Luego, como Γ es a B, así la unidad es al (número) E. Pero se ha demostrado que también como A es a Γ, Δ es a la unidad. Luego, por igualdad, como A es a B, así el número Δ es al (número) E [V 22].

Por consiguiente, las magnitudes conmensurables A, B

guardan entre sí la misma razón que el número Δ con el número E. Q. E. D.[8].

PROPOSICIÓN 6

Si dos magnitudes guardan entre sí la razón que un número (guarda) con un número, las magnitudes serán conmensurables.

Guarden, pues, las dos magnitudes A, B entre sí la razón que el número Δ (guarda) con el número E.

Digo que las magnitudes A, B son conmensurables.

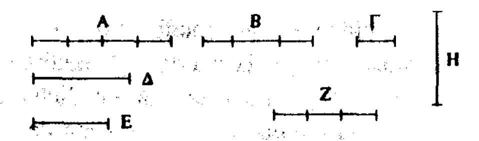
Pues divídase A en tantas (magnitudes) iguales como unidades hay en Δ, y sea Γ igual a una de ellas; y compóngase Z de tantas unidades iguales a Γ como unidades hay en E.

Así pues, dado que, cuantas unidades hay en Δ, tantas magnitudes iguales a Γ hay en A, entonces, la parte que la unidad es de Δ, la misma parte es también Γ de A; luego, como Γ es a A, así

---

[8] La prueba descansa, en parte, sobre la noción de proporción prevista para los números y en el supuesto tácito de que los términos que sean proporcionales en el sentido de la def. 20 del libro VII, también lo serán en el sentido generalizado de la def. 5 del libro V. Euclides, después de dar dos caracterizaciones autónomas y separadas de la proporcionalidad, una para las magnitudes en el libro V y otra para los números en el libro VII, viene a suponer que las segundas pueden considerarse un caso particular de las primeras. De una relación similar entre magnitudes y números ya se había hecho eco ARISTÓTELES (*Analíticos Segundos*, 74a17, 75b4-5). Pero esta correspondencia entre las magnitudes conmensurables y los números no deja de resultar ahora un tanto inesperada. Se ha llegado a decir que la falta de una correlación expresa entre unas y otros, antes del libro X, constituye probablemente la mayor laguna de los *Elementos* en cuestión de fundamentos (I. MUELLER, *op. cit.*, pág. 138). SIMSON, por su parte, procura establecer esa correspondencia a partir de una proposición C intercalada en el libro V (*vid.* edic. cit., págs. 122 y 313-314).

la unidad es a Δ [VII Def. 20]. Pero la unidad mide al número Δ; entonces también Γ mide a A. Ahora bien, dado que, como Γ es a



A, así la unidad es al (número) Δ, entonces, por inversión, como A es a Γ, así el número Δ es a la unidad [V 7 Por.]. Y puesto que, cuantas unidades hay en E, tantas hay a su vez en Z iguales a Γ, entonces como Γ es a Z, así la unidad es al (número) E [VII Def. 20]. Pero se ha demostrado que también como A es a Γ, así Δ a la unidad; entonces, por igualdad, como A es a Z, así Δ a E [V 22]; ahora bien, como Δ es a E, así A a B; entonces, como A es a B, así también a Z [V 11]. Luego A guarda la misma razón con cada una de las (magnitudes) B, Z; por tanto, B es igual a Z [V 9]. Pero Γ mide a Z; luego mide también a B. Pero también a A; luego Γ mide a A, B. Por tanto, A es conmensurable con B.

Por consiguiente, si dos magnitudes guardan entre sí..., etc.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si hay dos números, como Δ, E, y una recta, como A, es posible hacer una recta [Z] que sea a la recta como el número Δ es al número E. Pero, si se toma una media proporcional de A, Z, como B, como A es a Z, así el cuadrado de A será al cuadrado de B, es decir que como la primera es a la tercera, así la (figura) construida sobre la primera es a la figura semejante y construida de manera semejante sobre la segunda [VI 19 Por.]. Pero como A es a Z, así el número Δ es al número E; entonces como el número Δ es al número E, así también la figura construida sobre la recta A [9] a la figura construida sobre la recta B. Q. E. D.

[9] *Tò apò tês* A *eutheías*, «la (figura construida) sobre la recta A».

Proposición 7

Las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número.

Sean A, B, magnitudes inconmensurables.

Digo que A no guarda con B la razón que un número guarda con un número.

A

B

Pues, si A guarda con B la razón que un número guarda con un número, A será conmensurable con B [X 6]. Pero no lo es; por tanto, A no guarda con B la razón que un número guarda con un número.

Por consiguiente, las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón..., etc.

Proposición 8

Si dos magnitudes no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número, las magnitudes serán inconmensurables.

No guarden, pues, entre sí las dos magnitudes A, B la razón que un número guarda con un número.

A

B

Digo que las magnitudes A, B son inconmensurables.

Pues, si son conmensurables, A guardará con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Pero no la guarda. por tanto, las magnitudes A, B son inconmensurables.

Por consiguiente, si dos magnitudes guardan entre sí..., etc.

PROPOSICIÓN 9

Los cuadrados de rectas conmensurables en longitud guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y los cuadrados que guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado tendrán también los lados conmensurables en longitud. Pero los cuadrados de las rectas inconmensurables en longitud no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, y los cuadrados que no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado tampoco tendrán los lados conmensurables en longitud.

Sean, pues, A, B conmensurables en longitud.

Digo que el cuadrado de A guarda con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Pues como A es conmensurable en longitud con B, entonces A guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Guarde la razón de Γ a Δ. Pues bien, dado que, como A es a B, así Γ a Δ, mientras que el cuadrado de A guarda con el cuadrado de B una razón duplicada de la que A guarda con B, porque las figuras semejantes guardan una razón duplicada de la de sus lados correspondientes [VI 20 Por.]; y dado que el cuadrado de Γ guarda con el cuadrado de Δ una razón duplicada de la que Γ guarda con Δ, porque entre dos números cuadrados hay un número que es media proporcional, y el número cuadrado guarda con el número cuadrado una razón duplicada de la que el lado guarda

con el lado [VIII 11]; luego como el cuadrado de A es al cuadrado de B, así el cuadrado de Γ es al cuadrado de Δ.

Pero ahora, como el cuadrado de A es al cuadrado de B, sea así el cuadrado de Γ al cuadrado de Δ.

Digo que A es conmensurable en longitud con B.

Pues, dado que, como el cuadrado de A es al cuadrado de B, así el cuadrado de Γ al de Δ, mientras que el cuadrado de A guarda con el cuadrado de B una razón duplicada de la que A guarda con B, y el cuadrado de Γ guarda con el cuadrado de Δ una razón duplicada de la que Γ guarda con Δ, entonces, como A es a B, así Γ a Δ. Luego A guarda con B la razón que el número Γ guarda con el número Δ. Por tanto A es conmensurable en longitud con B [X 6].

Sea ahora A inconmensurable en longitud con B.

Digo que el cuadrado de A no guarda con el de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Pues si el cuadrado de A guarda con el de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, A será conmensurable con B. Pero no lo es; luego el cuadrado de A no guarda con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

No guarde ahora el cuadrado de A con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Digo que A es inconmensurable en longitud con B.

Pues si A es conmensurable con B, el cuadrado de A guardará con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pero no la guarda; luego A no es conmensurable en longitud con B.

Por consiguiente, los cuadrados de (rectas) conmensurables en longitud, etc. [10].

---

[10] Un escolio a esta proposición (*Schol.* X, núm. 26) afirma que este teorema fue descubierto por Teeteto.

Porisma:

Y a partir de lo demostrado quedará claro que las rectas conmensurables en longitud también lo son siempre en cuadrado, mientras que las conmensurables en cuadrado no lo son siempre en longitud [11].

LEMA

Se ha demostrado en los libros de aritmética que los números planos semejantes guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado [VIII 26], y que si dos números guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, son números planos semejantes [VIII 26 conversa]. Y es evidente a partir de esto que los números planos no semejantes, es decir los que no tienen los lados proporcionales, no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; pues, si la guardan, serán planos semejantes; lo cual precisamente se ha supuesto que no; luego los números planos no semejantes no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado [12].

---

[11] Heiberg atetiza cuatro párrafos situados a continuación del porisma por considerarlos superfluos e impropios del proceder habitual de Euclides. Un resumen del contenido de estos párrafos, no incluidos en el presente texto, puede ser el siguiente:

Tras una especie de prueba o explicación del porisma, se establece y explica que las rectas inconmensurables en longitud no son necesariamente inconmensurables también en cuadrado y que, sin embargo, aquellas rectas que son inconmensurables en cuadrado son siempre inconmensurables en longitud.

[12] Lema sospechoso. HEATH lo atetiza (*edic. cit.*, III, pág. 30). Sin embargo Heiberg lo mantiene pese a sus reservas, algunas de las cuales hacen referencia a la proposición siguiente. Cf. nota 13.

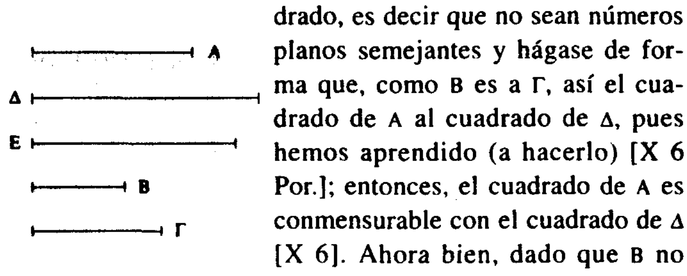
PROPOSICIÓN 10

Hallar dos rectas inconmensurables, una sólo en longitud, otra también en cuadrado, con una recta determinada.

Sea A la recta determinada.

Así pues, hay que hallar dos rectas inconmensurables, una sólo en longitud, otra también en cuadrado, con la recta determinada A.

Tómense, pues, dos números B, Γ que no guarden entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, es decir que no sean números planos semejantes y hágase de forma que, como B es a Γ, así el cuadrado de A al cuadrado de Δ, pues hemos aprendido (a hacerlo) [X 6 Por.]; entonces, el cuadrado de A es conmensurable con el cuadrado de Δ [X 6]. Ahora bien, dado que B no guarda con Γ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el cuadrado de A tampoco guarda con el cuadrado de Δ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con Δ [X 9].



Tómese la media proporcional E de A, Δ; entonces, como A es a Δ, así el cuadrado de A es al cuadrado de E [V Def. 9]. Pero A es inconmensurable en longitud con Δ; luego el cuadrado de A es también inconmensurable con el cuadrado de E [X 11]; por tanto A es inconmensurable en cuadrado con E.

Por consiguiente, se han hallado dos rectas inconmensurables, Δ, E, una, Δ, sólo en longitud y la otra, E, en cuadrado

y también obviamente en longitud, con la recta determinada A [13].

PROPOSICIÓN 11

Si cuatro magnitudes son proporcionales y la primera es conmensurable con la segunda, también la tercera será conmensurable con la cuarta, y si la primera es inconmensurable con la segunda, la tercera será también inconmensurable con la cuarta.

Sean A, B, Γ, Δ cuatro magnitudes proporcionales, es decir: como A es a B, así Γ a Δ, y sea A conmensurable con B.

Digo que Γ también será conmensurable con Δ.

Pues como A es conmensurable con B, entonces A guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Y como A es a B, así Γ a Δ. Entonces Γ guarda también con Δ la

---

[13] Existen serias objeciones para considerar genuino este teorema:

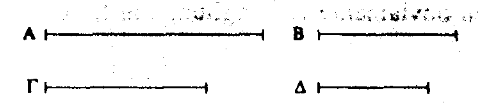
En primer lugar, depende de la siguiente proposición X 11 para concluir que el cuadrado de A es inconmensurable con el cuadrado de E; de modo que incurriría en la pretensión irregular de probar un teorema sobre la base de demostraciones posteriores.

Además la expresión *emáthomen gár* «pues lo hemos aprendido» no es propia de Euclides y revelaría la mano de un estudiante (aunque esta expresión se halla en la *Sectio Canonis* euclídea empleada con referencia a los *Elementos*).

Por último, el manuscrito P, en su primera mano, tiene el número 10 al principio de X 11, de donde parece desprenderse que inicialmente X 10 no tenía número.

Por todo ello, Heath considera espurios tanto el lema anterior como la proposición X 10. Heiberg, si bien no lo atetiza, declara en una nota a su traducción (edic. cit., III, pág. 35) que resulta sospechoso y que a duras penas se puede considerar de Euclides.

razón que un número guarda con un número; luego Γ es conmensurable con Δ [X 6].



Pero ahora sea A inconmensurable con B.

Digo que Γ también será inconmensurable con Δ.

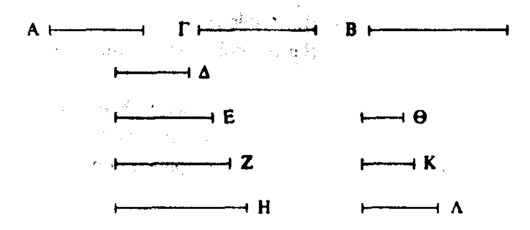
Pues como A es inconmensurable con B, entonces A no guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 7]. Y A es a B como Γ es a Δ. Entonces Γ tampoco guarda con Δ la razón que un número guarda con un número; luego Γ es inconmensurable con Δ [X 8].

Por consiguiente, si cuatro magnitudes..., etc.

Proposición 12

Las magnitudes conmensurables con una misma magnitud son también conmensurables entre sí.

Sea, pues, conmensurable cada una de las magnitudes A, B con la magnitud Γ.



Digo que A es también conmensurable con B.

Pues como A es conmensurable con Γ, entonces A guarda con Γ la razón que un número guarda con un número [X 5].

Guarde la razón de Δ a E. Puesto que a su vez Γ es conmensurable con B, entonces Γ guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Guarde la razón de Z a H. Y dadas cuantas razones se quiera, a saber, la de Δ a E y la de Z a H, tómense los números Θ, K, Λ sucesivamente en las razones dadas [VIII 4]; de modo que, como Δ es a E, así Θ a K, y como Z es a H, así K a Λ.

Así pues, dado que, como A es a Γ, así Δ a E, mientras que, como Δ es a E, así Θ a K, entonces como A es a Γ, así también Θ a K [V 11]. Y puesto que, como Γ es a B, así Z es a su vez a H, mientras que, como Z es a H, K es a Λ, entonces, como Γ es a B, así K a Λ [V 11]. Pero, como A es a Γ, así también Θ a K; entonces, por igualdad, como A es a B, así Θ a Λ [V 22]. Luego A guarda con B la razón que el número Θ guarda con el número Λ; por tanto A es conmensurable con B [X 6].

Por consiguiente, las (magnitudes) conmensurables con una misma magnitud son conmensurables entre sí. Q. E. D.

Proposición 13

Si hay dos magnitudes conmensurables y una de ellas es inconmensurable con otra magnitud cualquiera, también la restante será inconmensurable con ella.

Sean A, B dos magnitudes conmensurables y una de ellas, A, sea inconmensurable con otra magnitud cualquiera, Γ.

Digo que la restante, B, es también inconmensurable con Γ.

A

Γ

B

Pues si B es conmensurable con Γ, y A es también conmensurable con B, entonces A es conmensurable con Γ [X 12]. Pero es también inconmensurable; lo cual es imposible. Por tanto B

no es conmensurable con Γ; luego es inconmensurable (con ella).

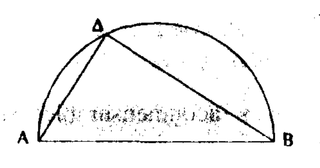
Por consiguiente, si dos magnitudes conmensurables..., etc.

LEMA

Dadas dos rectas desiguales hallar en cuánto el cuadrado de la mayor es mayor que el cuadrado de la menor.

Sean AB, Γ las dos rectas desiguales dadas, de las cuales sea AB la mayor.

Así pues hay que hallar en cuánto es mayor el cuadrado de AB que el de Γ.



Descríbase sobre AB el semicírculo AΔB y adáptese a él la (recta) AΔ igual a Γ [IV 1] y trácese ΔB. Entonces está claro que el ángulo AΔB es recto [III 31] y que el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de AΔ, es decir de Γ, en el cuadrado de ΔB [I 47].

De manera semejante, dadas dos rectas, se hallará la recta cuyo cuadrado es igual a los cuadrados de ellas, de la siguiente manera:

Sean AΔ, ΔB las dos rectas dadas y sea lo requerido hallar la recta cuyo cuadrado es igual a los cuadrados de ellas. Pónganse pues de modo que sea recto el ángulo comprendido por AΔ, ΔB, y trácese AB; está claro de nuevo que AB es la (recta) cuyo cuadrado es igual a los de AΔ, ΔB [I 47]. Q. E. D. [14].

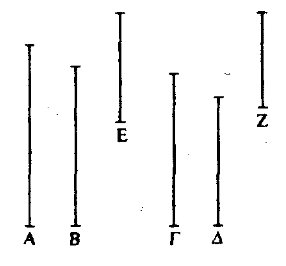
---

[14] El lema proporciona el método de hallar una recta c igual a $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ donde a y b son rectas dadas de las que la mayor es a.

PROPOSICIÓN 14

Si cuatro rectas son proporcionales, y el cuadrado de la primera es mayor que el de la segunda en el cuadrado de una recta conmensurable con la primera, el cuadrado de la tercera será también mayor que el de la cuarta en el cuadrado de una (recta) conmensurable con la tercera. Y si el cuadrado de la primera es mayor que el de la segunda en el cuadrado de una recta inconmensurable con la primera, el cuadrado de la tercera será también mayor que el de la cuarta en el cuadrado de una recta inconmensurable con ella (la tercera).

Sean Α, Β, Γ, Δ cuatro rectas proporcionales (tales que) como Α es a Β, así Γ a Δ, y sea el cuadrado de Α mayor que el de Β en el cuadrado de Ε, y el cuadrado de Γ sea mayor que el de Δ en el cuadrado de Ζ.



Digo que si Α es conmensurable con Ε, Γ será también conmensurable con Ζ, pero si Α es inconmensurable con Ε, Γ será también inconmensurable con Ζ.

Pues, dado que, como Α es a Β, así Γ a Δ, entonces, como el cuadrado de Α es al cuadrado de Β, así también el cuadrado de Γ al de Δ [VI 22]. Pero los cuadrados de Ε, Β son iguales al cuadrado de Α, y los cuadrados de Δ, Ζ son iguales al cuadrado de Γ. Entonces, como los cuadrados de Ε, Β son al cuadrado de Β, así los cuadrados de Δ, Ζ al cuadrado de Δ; luego, por separación, como el cuadrado de Ε es al cuadrado de Β, así el cuadrado de Ζ al cuadrado de Δ [V 17]; por tanto, como Ε es a Β, así Ζ a Δ [VI 22]; entonces, por inversión, como Β es a Ε, así Δ a Ζ. Pero como Α es a Β, así también Γ a Δ; luego, por igual-

dad, como A es a E, así Γ a Z [V 22]. Ahora bien, si A es conmensurable con E, Γ es también conmensurable con Z, pero si A es inconmensurable con E, Γ es también inconmensurable con Z [X 11].

Por consiguiente..., etc. [15].

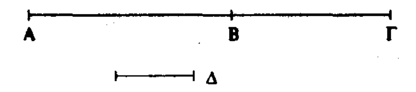
Proposición 15

Si se suman dos magnitudes conmensurables, la (magnitud) total también será conmensurable con cada una de ellas; y si la (magnitud) total es conmensurable con cada una de ellas, también las magnitudes iniciales serán conmensurables.

Súmense, pues, las dos magnitudes conmensurables AB, BΓ.

Digo que la (magnitud) total AΓ es también conmensurable con cada una de las (magnitudes) AB, BΓ.

Pues como AB, BΓ son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas (una magnitud) y sea Δ. Así pues, dado



que Δ mide a AB, BΓ, medirá también a la magnitud total AΓ. Pero mide también a AB, BΓ. Entonces Δ mide a AB, BΓ, AΓ. Luego AΓ es conmensurable con cada una de las magnitudes AB, BΓ [X Def. 1].

Pero ahora sea AΓ conmensurable con AB.

Digo que AB, BΓ son también conmensurables.

---

[15] En aras de la claridad sustituyo por «primera» o «tercera» la palabra *heauté* del griego cuya traducción literal se prestaría a equívocos.

Pues como AΓ, AB son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas (una magnitud) y sea Δ. Así pues, dado que Δ mide a ΓA, AB, entonces medirá también a la magnitud restante BΓ. Pero también mide a AB; entonces Δ medirá a AB, BΓ. Luego AB, BΓ son conmensurables [X Def. 1]

Por consiguiente, si dos magnitudes..., etc.

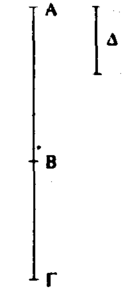
Proposición 16

Si se suman dos magnitudes inconmensurables, la magnitud total también será inconmensurable con cada una de ellas; y si la magnitud total es inconmensurable con una de ellas, las magnitudes iniciales serán también inconmensurables.

Súmense, pues, las dos magnitudes inconmensurables AB, BΓ.

Digo que la (magnitud) total AΓ es inconmensurable con cada una de las (magnitudes) AB, BΓ.

Pues si ΓA, AB no son inconmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas (una magnitud), si es posible, y sea Δ. Así pues, como Δ mide a ΓA, AB, entonces, medirá también a la magnitud restante BΓ. Pero mide también a AB; entonces Δ mide a AB, BΓ. Luego AB, BΓ son conmensurables; pero se ha supuesto que son inconmensurables; lo cual es imposible. Por tanto, ninguna magnitud medirá a ΓA, AB; luego ΓA, AB son inconmensurables [X Def. 1]. De manera semejante demostraríamos que AΓ, ΓB son inconmensurables. Por tanto AΓ es inconmensurable con cada una de las magnitudes AB, BΓ.



Pero ahora sea AΓ inconmensurable con una de las (magnitudes) AB, BΓ. Séalo en primer lugar con AB.

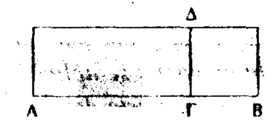
Digo que AB, BΓ son también inconmensurables. Pues, si son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas (una magnitud) y sea Δ. Así pues, como Δ mide a AB, BΓ, entonces, medirá también a la (magnitud) total AΓ. Pero mide también a AB; entonces Δ mide a ΓA, AB. Luego ΓA, AB son conmensurables; pero se ha supuesto que son inconmensurables; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud medirá a AB, BΓ; por tanto AB, BΓ son inconmensurables.

Por consiguiente, si dos magnitudes..., etc.

LEMA

Si se aplica a una recta un paralelogramo deficiente en la figura de un cuadrado, el (paralelogramo) aplicado es igual al (rectángulo) producido por los segmentos de recta que resultan de la aplicación.

Aplíquese, pues, a la recta AB, el paralelogramo AΔ deficiente en la figura de un cuadrado, ΔB.



Digo que AΔ es igual al rectángulo comprendido por AΓ, ΓB.

Y esto queda claro por sí mismo: pues como ΔB es un cuadrado, ΔΓ es igual a ΓB, y AΔ es el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓΔ, es decir, el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB.

Por consiguiente, si se aplica una recta... etc. [16].

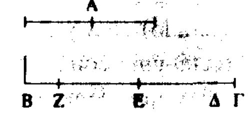
[16] Como anota HEATH (*edic. cit.*, III, pág. 41), si a es la recta dada y x el lado del cuadrado en el que el rectángulo aplicado es deficiente, el rectángulo es igual a $ax-x^2$, igual a su vez a $x\,(a-x)$. El rectángulo puede formularse como xy, donde $x+y=a$. Dada el área $x\,(a-x)$ ó xy (donde $x+y=a$), dos aplicaciones diferentes darán rectángulos iguales a esa área; siendo los lados del defecto x ó $a-x$ (x ó y) respectivamente; pero el segundo modo de expresión muestra que los rectángulos no difieren en la forma sino en la posición.

En lo que se refiere a la noción de áreas deficientes cf. nota 59 de *Elementos I-IV*, pág. 255.

PROPOSICIÓN 17

Si hay dos rectas desiguales, y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, y si la divide en (partes) conmensurables en longitud, el cuadrado de la mayor será mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable con ella (la mayor). Y si el cuadrado de la mayor es mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (la mayor), y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) conmensurables en longitud.

Sean A, BΓ dos rectas desiguales, de las cuales BΓ sea la mayor, y aplíquese a BΓ un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de la menor, A, es decir, al (cuadrado) de la mitad de A, y deficiente en la figura de un cuadrado. Y sea el (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔΓ [Lema]. Y sea BΔ conmensurable en longitud con ΔΓ.



Digo que el cuadrado de BΓ es mayor que el de A en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (BΓ).

Divídase, pues, BΓ en dos partes iguales por el (punto) E, y hágase EZ igual a ΔE. Entonces, la restante ΔΓ es igual a BZ. Y dado que la recta BΓ ha sido dividida en partes iguales por el (punto) E y en partes desiguales por el (punto) Δ, entonces el rectángulo comprendido por BΔ, ΔΓ junto con el cuadrado de EΔ es igual al cuadrado de EΓ [II 5]; y (lo mismo vale) para sus cuádruples; entonces el cuádruple del (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔΓ junto con el cuádruple del cuadrado de ΔE es igual al cuádruple del cuadrado de EΓ.

Pero el cuadrado de A es igual al cuádruple del rectángulo comprendido por BΔ, ΔΓ, mientras que el cuadrado de ΔZ es igual al cuádruple del cuadrado de ΔE: porque ΔZ es el doble de ΔE. Pero el cuadrado de BΓ es igual al cuádruple del cuadrado de EΓ: porque BΓ es a su vez el doble de ΓE. Luego los cuadrados de las rectas A, ΔZ son iguales al cuadrado de BΓ; de modo que el cuadrado de BΓ es mayor que el cuadrado de A en el cuadrado de ΔZ; luego el cuadrado de BΓ es mayor que el de A en el cuadrado de ΔZ [17].

Hay que demostrar que BΓ es además conmensurable con ΔZ. Pues como BΔ es conmensurable en longitud con ΔΓ, entonces BΓ es conmensurable en longitud con ΓΔ [X 15]. Pero ΓΔ es conmensurable en longitud con ΓΔ, BZ: porque ΓΔ es igual a BZ [X 6]. Luego BΓ es conmensurable en longitud con BZ, ΓΔ [X 12]; de modo que BΓ también es conmensurable en longitud con la restante ZΔ [X 15]; luego el cuadrado de BΓ es mayor que el cuadrado de A en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (BΓ).

Pues bien, sea mayor el cuadrado de BΓ que el cuadrado de A en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (BΓ) y aplíquese a BΓ un paralelogramo igual a la cuarta parte del (cuadrado) de A y deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el rectángulo comprendido por BΔ, ΔΓ.

Hay que demostrar que BΔ es conmensurable en longitud con ΔΓ.

Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de manera semejante que el cuadrado de BΓ es mayor que el de A en el cuadrado de ZΔ. Pero el cuadrado de BΓ es mayor que el

[17] *Hē* BΓ *ára tês* A *meídson dýnatai tê* ΔZ. Se utiliza *dýnatai* aquí en el mismo sentido técnico que *dynámei* «en cuadrado» (cf. MUGLER, *Dictionnaire...*, págs. 148 ss.) o *hē dynaménē* «el lado del cuadrado equivalente a». Este verbo se utiliza en contextos matemáticos para significar la operación de elevar al cuadrado.



de A en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (BΓ). Entonces BΓ es conmensurable en longitud con ZΔ; de modo que BΓ también es conmensurable en longitud con el resto, a saber, la suma de BZ, ΔΓ [X 15]. Pero la suma de BZ, ΔΓ es conmensurable con ΔΓ [X 6]. De modo que BΓ es también conmensurable en longitud con ΔΓ [X 15].

Por consiguiente, si hay dos rectas desiguales..., etc.

Proposición 18

Si hay dos rectas desiguales y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor deficiente en la figura de un cuadrado, y si la divide en (partes) inconmensurables, el cuadrado de la mayor será mayor que el cuadrado de la menor en el cuadrado de una recta inconmensurable con ella (la mayor). Y si el cuadrado de la mayor es mayor que el cuadrado de la menor en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (la mayor) y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) inconmensurables.

Sean A, BΓ dos rectas desiguales, de las cuales sea BΓ la mayor, y aplíquese a BΓ un paralelogramo igual a la cuarta parte del (cuadrado) de la menor, A, y deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo) BΔΓ [Cf. lema anterior a X 17], y sea BΔ inconmensurable en longitud con ΔΓ.

Digo que el cuadrado de BΓ es mayor que el cuadrado de A en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (BΓ).

Pues, siguiendo la misma construcción del (teorema) anterior, demostraríamos de manera semejante que el cuadrado de BΓ es mayor que el de A en el (cuadrado) de ZΔ.

Hay que demostrar que BΓ es inconmensurable en longitud con ΔZ. Pues como BΔ es inconmensurable en longitud con ΔΓ, entonces BΓ es también inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 16]. Pero ΔΓ es conmensurable con la suma de BZ, ΔΓ [X 6]; entonces BΓ es inconmensurable con la suma de BZ, ΔZ [X 13]. De modo que BΓ es también inconmensurable en longitud con la restante ZΔ [X 16]. Y el cuadrado de BΓ es mayor que el cuadrado de A en el (cuadrado) de ZΔ: luego el cuadrado de BΓ es mayor que el cuadrado de A en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (BΓ).

Sea a su vez el cuadrado de BΓ mayor que el cuadrado de A en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (BΓ) y aplíquese a BΓ un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de A y deficiente en la figura de un cuadrado y sea el (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔΓ.

Hay que demostrar que BΔ es inconmensurable en longitud con ΔΓ.

Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de manera semejante que el cuadrado de BΓ es mayor que el cuadrado de A en el (cuadrado) de ZΔ. Pero el cuadrado de BΓ es mayor que el cuadrado de A en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (BΓ). Luego BΓ es inconmensurable en longitud con ZΔ; de modo que BΓ es inconmensurable con el resto, es decir, con la suma de BZ, ΔΓ [X 16]. Pero la suma de BZ, ΔΓ es conmensurable en longitud con ΔΓ [X 6]; luego BΓ es inconmensurable en longitud con ΔΓ [X 13]; de modo que, por separación, BΔ es inconmensurable en longitud con ΔΓ [X 16]

Por consiguiente, si hay dos rectas..., etc.

Lema

Puesto que queda demostrado que las (rectas) conmensurables en longitud lo son siempre también en cuadrado, mientras

que las que lo son en cuadrado no lo son siempre también en longitud, sino que pueden ser, en efecto, conmensurables o inconmensurables en longitud, queda claro que, si una recta es conmensurable en longitud con una recta expresable [18] determinada, se llama expresable y conmensurable con ella no sólo en longitud sino también en cuadrado, porque las (rectas) conmensurables en longitud lo son siempre también en cuadrado. Ahora bien, si una recta es conmensurable en cuadrado con una (recta) expresable determinada, entonces, si lo es también en longitud, se dice que es expresable y conmensurable con ella en longitud y en cuadrado; pero si una recta, siendo a su vez conmensurable en cuadrado con otra recta expresable determinada, es inconmensurable en longitud con ella, en este caso también se llama expresable pero conmensurable sólo en cuadrado [19].

Proposición 19

El rectángulo comprendido por rectas expresables conmensurables en longitud, según alguna de las formas antedichas es expresable [20].

---

[18] A partir de aquí traduzco *rhētós* como «expresable» para abreviar la expresión «racionalmente expresable» que complicaría en exceso la lectura del texto en castellano.

[19] Heath *(op. cit.*, III, pág. 47) suprime el lema por considerarlo superfluo y prolijo en exceso.

[20] Heath *(op. cit.*, III, pág. 48) encuentra dificultades para admitir estas palabras pues sólo hay dos formas de conmensurabilidad: conmensurabilidad en longitud, y por tanto en cuadrado, o sólo en cuadrado, y cada una excluye la otra. Por otra parte *proeirēménōn* «antedichas» parece referirse al lema anterior que considera sospechoso. Por todo ello cree que la mejor solución sería suprimir tanto el lema como las palabras citadas del enunciado de X 19.

Pues sea comprendido el rectángulo AΓ por las rectas expresables y conmensurables en longitud AB, BΓ.

Digo que AΓ es expresable.

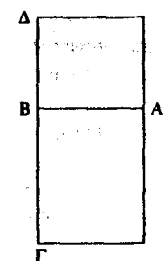
Pues constrúyase sobre AB el cuadrado de AΔ. Entonces AΔ es expresable [X Def. 4]. Y como AB es conmensurable en longitud con BΓ, mientras que AB es igual a BΔ, entonces BΔ es conmensurable en longitud con BΓ. Y como BΔ es a BΓ, así ΔA a AΓ [VI 1]. Luego ΔA es conmensurable con AΓ [X 11]. Pero ΔA es expresable; luego AΓ es también expresable [X Def. 4].

Por consiguiente, el rectángulo comprendido..., etc.

Proposición 20

Si se aplica un (área) expresable a una (recta) expresable, produce como anchura una (recta) expresable y conmensurable en longitud con aquella a la que se ha aplicado.

Aplíquese, pues, el (área) expresable AΓ a la recta AB expresable una vez más según alguna de las formas antedichas, de modo que produzca como anchura BΓ.



Digo que BΓ es expresable y conmensurable en longitud con BA.

Pues constrúyase sobre AB el cuadrado de AΔ; entonces AΔ es expresable [X Def. 4]. Pero también lo es AΓ; luego ΔA es conmensurable con AΓ. Ahora bien, como ΔA es a AΓ, así ΔB a BΓ [VI 11]. Por tanto ΔB es conmensurable también con BΓ [X 11]; pero ΔB es igual a BA. Luego AB es conmensurable con BΓ. Ahora bien, AB es expresable; por tanto, BΓ es expresable y conmensurable en longitud con AB.

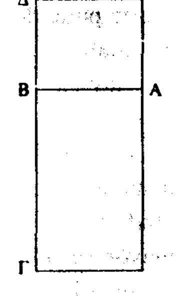
Por consiguiente, si se aplica un (área) expresable a una recta expresable..., etc.

PROPOSICIÓN 21

El rectángulo comprendido por rectas expresables y conmensurables sólo en cuadrado no es racionalmente expresable [21] *y el lado del cuadrado igual a él tampoco es racionalmente expresable, llámese (este último) medial.*

Sea, pues, comprendido el rectángulo AΓ por las rectas expresables y conmensurables sólo en cuadrado AB, BΓ.

Digo que AΓ no es expresable, y el lado del cuadrado igual a él tampoco es expresable, y llámese medial.



Pues constrúyase sobre AB el cuadrado AΔ; entonces AΔ es expresable [X Def. 4]. Y como AB es inconmensurable en longitud con BΓ, porque se ha supuesto que es conmensurable sólo en cuadrado, mientras que AB es igual a BΔ, entonces ΔB es inconmensurable en longitud con BΓ. Ahora bien, como ΔB es a BΓ, así AΔ es a AΓ [VI 1]; luego ΔA es inconmensurable con AΓ [X 11]. Pero ΔA es expresable; luego AΓ no es expresable; de modo que el lado del cuadrado igual a AΓ tampoco es expresable, llámese medial. Q. E. D. [22].

21 Cf. notas 2 y 3.

22 La recta medial recibe tal nombre por tratarse de la media proporcional entre dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado. Se demuestra aquí que el rectángulo comprendido por ellas no es racionalmente expresable. En el porisma a X 23 esta área se denomina «medial».

LEMA

Si hay dos rectas, como la primera es a la segunda, así el cuadrado de la primera al rectángulo comprendido por las dos rectas.

Sean ZE, EH dos rectas.

Digo que como ZE es a EH, así el (cuadrado) de ZE al (rectángulo comprendido) por ZE, EH.

Constrúyase, pues, sobre ZE, el cuadrado ΔZ, y complétese el (paralelogramo) HΔ. Así pues, dado que, como ZE es a EH, así ZΔ a ΔH [VI 1], y ZΔ es el (cuadrado) de ZE, mientras que ΔH es el (rectángulo comprendido) por ΔE, EH, es decir por ZE, EH, entonces como ZE es a EH, así el (cuadrado) de ZE al (rectángulo comprendido) por ZE, EH. De manera semejante, como el (rectángulo comprendido) por HE, HZ es al (cuadrado) de EZ, es decir, como HΔ es a ZΔ, así es HE a EZ. Q. E. D.[23].

PROPOSICIÓN 22

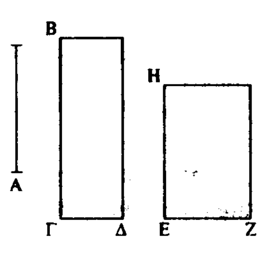
El (cuadrado) de una (recta) medial, si se aplica a una recta expresable, produce una anchura expresable e inconmensurable en longitud con aquella a la que se aplica.

Sea A la (recta) medial y ΓB la expresable, y aplíquese a BΓ el área rectangular BΔ igual al cuadrado de A, produciendo la anchura ΓΔ.

Digo que ΓΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΓB.

[23] Si a, b son dos rectas, $a : b :: a^2 : ab$.

Pues como A es una medial, su cuadrado es igual a un área comprendida por rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 21]. Sea su cuadrado igual a HZ. Pero su cuadrado también es igual a BΔ; entonces BΔ es igual a HZ. Pero también son equiangulares; y en los paralelogramos iguales y equiangulares, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados [VI 14].



Luego, proporcionalmente, como BΓ es a EH, así EZ a ΓΔ. Entonces, como el (cuadrado) de BΓ es al (cuadrado) de EH, así el (cuadrado) de EZ es al (cuadrado) de ΓΔ [VI 22]. Ahora bien, el (cuadrado) de ΓB es conmensurable con el de EH; porque cada uno de ellos es expresable; luego el (cuadrado) de EZ es también conmensurable con el (cuadrado) de ΓΔ [X 11]. Pero el (cuadrado) de EZ es expresable; luego el cuadrado de ΓΔ es también expresable [X Def. 4]; por tanto, ΓΔ es expresable. Ahora bien, como EZ es inconmensurable en longitud con EH, porque son conmensurables sólo en cuadrado; y como EZ es a EH, así el (cuadrado) de EZ al (rectángulo comprendido) por ZE, EH [lema], entonces el (cuadrado) de EZ es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ZE, EH. Pero el (cuadrado) de ΓΔ es conmensurable con el cuadrado de EZ; porque son expresables en cuadrado; y el (rectángulo comprendido) por ΔΓ, ΓB es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por ZE, EH, porque son iguales al (cuadrado) de A; luego el (cuadrado) de ΓΔ es también inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΔΓ, ΓB [X 13]. Pero, como el (cuadrado) de ΓΔ es al (rectángulo comprendido) por ΔΓ, ΓB, así ΔΓ es a ΓB [lema]. Por tanto, ΔΓ es inconmensurable en longitud con ΓB [X 11]. Por consiguiente, ΓΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΓB. Q. E. D.

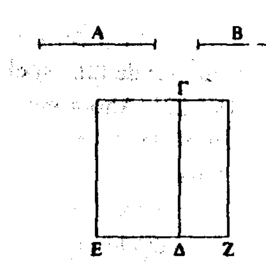
PROPOSICIÓN 23

La recta conmensurable con una (recta) medial es medial.

Sea A una recta medial, y sea B conmensurable con A.

Digo que B es también medial.

Póngase, pues, la recta expresable ΓΔ, y aplíquese a ΓΔ un área rectangular ΓE igual al cuadrado de A que produzca la anchura EΔ; entonces EΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22]. Pero aplíquese a ΓΔ un área rectangular, ΓZ, igual al (cuadrado) de B que produzca la anchura ΔZ. Entonces, dado que A es conmensurable con B, el (cuadrado) de A es también conmensurable con el (cuadrado) de B. Pero EΓ es igual al (cuadrado) de A, mientras que ΓZ es igual al (cuadrado) de B; por tanto, EΓ es conmensurable con ΓZ. Ahora bien, como EΓ es a ΓZ, así EΔ a ΔZ [VI 1]; entonces EΔ es conmensurable en longitud con ΔZ [X 11]; pero EΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΔΓ; entonces ΔΓ es expresable [X Def. 3] e inconmensurable en longitud con ΔΓ [X 13]; luego ΓΔ, ΔZ son expresables y conmensurables sólo en cuadrado. Pero la recta cuyo cuadrado es igual al rectángulo comprendido por rectas expresables y conmensurables sólo en cuadrado es medial [X 21]. Luego la recta cuyo cuadrado es igual al rectángulo comprendido por ΓΔ, ΔZ es medial; y el cuadrado de B es igual al rectángulo comprendido por ΓΔ, ΔZ. Por consiguiente, B es medial.



Porisma:

A partir de esto queda claro que un (área) conmensurable con un área medial es medial.

De acuerdo con lo que se ha dicho acerca de las (rectas) expresables [Lema siguiente a X 18] se sigue, en lo que se refiere a las mediales, que la recta conmensurable en longitud con una medial se llama medial y es conmensurable con ella no sólo en longitud sino también en cuadrado, porque, en general, las (rectas) conmensurables en longitud lo son siempre también en cuadrado. Pero si una recta es conmensurable en cuadrado con una medial, y si lo es también en longitud, en este caso se llaman también mediales y conmensurables en longitud y en cuadrado, pero si sólo lo son en cuadrado, se llaman mediales conmensurables sólo en cuadrado [24].

Proposición 24

El rectángulo comprendido por rectas mediales conmensurables en longitud según alguna de las formas antedichas [25], *es medial.*

Sea pues comprendido el rectángulo AΓ por las rectas mediales conmensurables en longitud AB, BΓ.

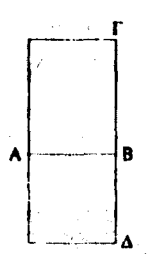
Digo que el (rectángulo) AΓ es medial.

Pues constrúyase sobre AB el cuadrado AΔ; entonces AΔ es medial. Y puesto que AB es conmensurable en longitud

[24] En el porisma tenemos la primera mención de un área medial. Se trata de un área igual al cuadrado de una recta medial. Euclides no da una definición explícita.

Por otra parte HEATH atetiza el último párrafo del porisma (cf. *op. cit.*, III, pág. 54 y nota 25).

[25] El enunciado presenta la misma dificultad que X 19. Cf. nota 20. Heath decide suprimir las palabras «según alguna de las formas antedichas» así como la parte del porisma anterior a la que debían referirse estas palabras.

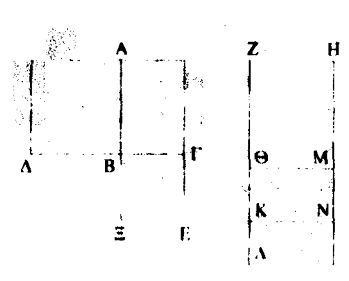


con ΒΓ, mientras que ΑΒ es igual a ΒΔ, entonces ΔΒ también es conmensurable en longitud con ΒΓ; de modo que ΔΑ es conmensurable con ΑΓ [VI 1, X 11]. Pero ΔΑ es medial. Por consiguiente, ΑΓ también es medial [X 23 Por.]. Q. E. D.

Proposición 25

El rectángulo comprendido por rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado o es expresable o es medial.

Sea, pues, comprendido el rectángulo ΑΓ por las rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado, ΑΒ, ΒΓ.



Digo que ΑΓ o es expresable o es medial.

Pues constrúyanse sobre ΑΒ, ΒΓ los cuadrados ΑΔ, ΒΕ; entonces cada uno de los (cuadrados) ΑΔ, ΒΕ son mediales.

Póngase la recta expresable ΖΗ, y aplíquese a la (recta) ΖΗ el paralelogramo rectangular ΗΘ igual a ΑΔ de modo que produzca la anchura ΖΘ; aplíquese, por otra parte a ΘΜ el paralelogramo rectangular ΜΚ igual a ΑΓ de modo que produzca la anchura ΘΚ, y además aplíquese a ΚΝ, de manera semejante, el rectángulo ΝΛ igual a ΒΕ, de modo que produzca la anchura ΚΛ. Entonces ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ están en línea recta. Así pues, dado que cada uno de los (cuadrados) ΑΔ, ΒΕ es medial, y ΑΔ es igual a ΗΘ, y ΒΕ a ΝΛ, entonces, cada uno de los (rectángulos) ΗΘ, ΝΛ también es medial. Y se han aplicado a la recta expresable ΖΗ; luego cada una de las (rec-

tas) ZΘ, KΛ es expresable e inconmensurable en longitud con ZH [X 22]. Y puesto que AΔ es conmensurable con BE, entonces HΘ es conmensurable con NΛ. Y como HΘ es a NΛ, así la (recta) ZΘ a la (recta) KΛ [VI 1]; entonces la (recta) ZΘ es conmensurable en longitud con la (recta) KΛ [X 11]. Luego ZΘ, KΛ son expresables y conmensurables en longitud; por tanto, el (rectángulo comprendido) por ZΘ, KΛ es expresable [X 19]. Y dado que ΔB es igual a BA, y ΞB a BΓ, entonces, como AB es a BΓ, así AB a BE y, por tanto, como ΔB es a BΓ, así ΔA a AΓ [VI 1], y como AB es a BΞ, así AΓ a ΓΞ [VI 1]; entonces, como ΔA es a AΓ, así AΓ a ΓΞ. Pero AΔ es igual a HΘ, AΓ a MK, y ΓΞ a NΛ; entonces, como HΘ es a MK, así MK a NΛ; luego, como ZΘ es a ΘK, así también ΘK a KΛ [VI 1, V 11]; por tanto, el (rectángulo comprendido) por ZΘ, KΛ es igual al (cuadrado) de ΘK [VI 17]. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por ZΘ, KΛ es expresable; entonces el (cuadrado) de ΘK es también expresable; luego ΘK es expresable. Y si es conmensurable en longitud con ZH, entonces ΘN es expresable; pero si es inconmensurable en longitud con ZH, KΘ, ΘM son expresables y conmensurables sólo en cuadrado, y entonces ΘN es medial [X 21]; por tanto ΘN o es expresable o es medial. Pero ΘN es igual a AΓ; luego AΓ o es expresable o es medial.

Por consiguiente, si el (rectángulo) comprendido por (rectas) conmensurables sólo en cuadrado..., etc.

Proposición 26

Un (área) medial no excede a otra medial en un (área) expresable.

Pues, si es posible, exceda el (área) AB al (área) medial AΓ en el (área) expresable ΔB, y póngase la recta expresable EZ, y

aplíquese a EZ el paralelogramo rectángulo ZΘ igual a AB de modo que produzca la anchura EΘ, y quítese el (rectángulo) ZH igual a AΓ; entonces el resto BΔ es igual al resto KΘ. Pero ΔB es expresable; por tanto KΘ también es expresable. Así pues, dado que cada uno de los (rectángulos) AB, AΓ es medial, y AB es igual a ZΘ, mientras que AΓ es igual a ZH, entonces cada uno de los (rectángulos) ZΘ, ZH es también medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable EZ; entonces cada una de las (rectas) ΘE, EH es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Ahora bien, puesto que ΔB es expresable y es igual a KΘ; entonces KΘ, es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ; luego HΘ es también expresable y conmensurable en longitud con EZ [X 20]. Pero EH es también expresable e inconmensurable en longitud con EZ; entonces EH es inconmensurable en longitud con HΘ [X 13]. Ahora bien, como EH es a HΘ, así el (cuadrado) de EH es al (rectángulo comprendido) por EH, HΘ; entonces el (cuadrado) de EH es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por EH, HΘ [X 11]. Pero los cuadrados de EH, HΘ son conmensurables con el (cuadrado) de EH, porque ambos son expresables; pero dos veces el (rectángulo comprendido) por EH, HΘ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por EH, HΘ, porque es el doble que él [X 6]; por tanto, los cuadrados de EH, HΘ son inconmensurables con dos veces el (rectángulo) comprendido) por EH, HΘ [X 13]; luego, tanto la suma de los (cuadrados) de EH, HΘ como dos veces el (rectángulo comprendido) por EH, HΘ, que es precisamente el cuadrado de EΘ [II 4], es inconmensurable con los (cuadrados) de EH, HΘ [X 16]. Pero los (cuadrados) de EH, HΘ son expresables; luego el

(cuadrado) de EΘ no es expresable [X Def. 4]. Por tanto, EΘ no es expresable. Pero también es expresable; lo cual es imposible.

Por consiguiente, un (área) medial no excede a otra (área) medial en un (área) expresable. Q. E. D.

Proposición 27

Hallar rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable.

Pónganse dos rectas, A, B, expresables conmensurables sólo en cuadrado, y tómese la media proporcional, Γ, de A, B, y, como A es a B, sea así Γ a Δ [VI 21].

Y puesto que A, B son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, entonces el (rectángulo comprendido) por A, B, es decir, el cuadrado de Γ [VI 17] es medial [X 21]. Entonces Γ es medial. Y puesto que, como A es a B, Γ es a Δ, y A, B son conmensurables sólo en cuadrado, entonces Γ, Δ son también conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Ahora bien, Γ es medial, luego también Δ es medial. Por tanto, Γ, Δ son mediales y conmensurables sólo en cuadrado.

Γ Δ A B

Digo que también comprenden un rectángulo expresable.

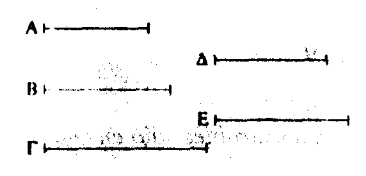
Pues, dado que, como A es a B, así Γ a Δ, entonces, por alternancia, como A es a Γ, B es a Δ [V 16]. Pero como A es a Γ, B es a Δ [V 16]. Pero como A es a Γ, Γ es a B; entonces, como Γ es a B, así B a Δ; luego el (rectángulo comprendido) por Γ, Δ es igual al cuadrado de B. Pero el cuadrado de B es expresable; por tanto el (rectángulo comprendido) por Γ, Δ es también expresable.

Por consiguiente, se han hallado rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) expresable. Q. E. D.

Proposición 28

Hallar (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial.

Pónganse las (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado A, B, Γ y tómese la media proporcional Δ de A, B [VI 13], y como B es a Γ, sea así Δ a E [VI 12].



Puesto que A, B son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, entonces el (rectángulo comprendido) por A, B, es decir el (cuadrado) de Δ [VI 17] es medial, luego Δ es medial [X 21]. Y puesto que B, Γ son conmensurables sólo en cuadrado, y como B es a Γ, Δ es a E, entonces Δ, E son también conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Pero Δ es medial; entonces E es también medial [X 23]. Luego Δ, E son mediales y conmensurables sólo en cuadrado.

Digo además que también comprenden un rectángulo medial.

Pues, dado que, como B es a Γ, así Δ a E, entonces, por alternancia, como B es a Δ, así Γ a E. Y como B es a Δ, así Δ a A; entonces, como Δ es a A, así también Γ a E; luego el (rectángulo comprendido) por A, Γ es igual al (rectángulo comprendido) por Δ, E [VI 16]. Pero el (rectángulo comprendido) por A, Γ es medial [X 21]. Por tanto, el (rectángulo comprendido) por Δ, E es también medial.

Por consiguiente, se han hallado rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un rectángulo medial. Q. E. D.

LEMA 1

Hallar dos números cuadrados tales que su suma sea también un cuadrado.

Pónganse dos números AB, BΓ y sean pares o impares. Y puesto que, tanto si de un número par se quita un número par, como si de un número impar se quita un número impar, el resto es par [IX 24-26]; entonces el resto AΓ es par. Divídase AΓ en dos partes iguales por Δ. Y sean AB, BΓ o números planos semejantes o números cuadrados, que son también ellos mismos números planos semejantes; entonces, el producto de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓΔ es igual al cuadrado de BΔ. Y el producto de AB, BΓ es también un cuadrado, puesto que precisamente hemos demostrado que, si dos números planos semejantes, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número) el producto es un número cuadrado [IX 1]; entonces, se han hallado dos números cuadrados, el producto de AB, BΓ y el cuadrado de ΓΔ que, sumados, hacen el cuadrado de BΔ.

A
Δ
Γ
B

Y queda claro que se han hallado a su vez dos números cuadrados, el (cuadrado) de BΔ y el (cuadrado) de ΓΔ, tales que su diferencia, el producto de AB, BΓ es un número cuadrado, siempre que AB, BΓ sean números planos semejantes. Pero en el caso de que no sean números planos semejantes, se han hallado dos cuadrados, el (cuadrado) de BΔ y el (cuadrado) de ΔΓ, cuya diferencia, el producto de AB, BΓ no es un cuadrado. Q. E. D.

LEMA 2

Hallar dos números cuadrados tales que su suma no sea un cuadrado.

Sea, pues, el producto de AB, BΓ, según dijimos, un cuadrado, y sea ΓA un número par, y divídase en dos partes iguales por Δ. Queda claro que el producto de AB, BΓ junto con el cuadrado de ΓΔ es igual al cuadrado de BΔ [lema 1]. Quítese la unidad ΔE; entonces el producto de AB, BΓ junto con el cuadrado de ΓE es menor que el cuadrado de BΔ.

Pues bien, digo que el cuadrado producto de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE no será un número cuadrado.

Pues si es cuadrado, o es igual al (cuadrado) de BE o menor que el (cuadrado) de BE, pero no es mayor, para que no se divida la unidad.

En primer lugar, si es posible, sea el (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE igual al cuadrado de BE, y sea HA el doble de la unidad ΔE. Así pues como el total AΓ es el doble del total ΓΔ y en ellos AH es el doble de ΔE, entonces el resto HΓ es el doble del resto EΓ; luego HΓ se ha dividido en dos partes iguales por E; por tanto, el (producto) de HB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE es igual al (cuadrado) de BE [II 6]. Pero se ha supuesto que el (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE es igual al (cuadrado) de BE; entonces el (producto) de HB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE es igual al (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE. Ahora bien, si se quita de ambos el (cuadrado) de ΓE, se sigue que AB es igual a HB; lo cual es absurdo. Luego el (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE no es igual al (cuadrado) de BE.

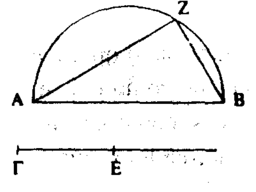
Digo además que tampoco es menor que el (cuadrado) de BE. Pues, si es posible, sea igual al (cuadrado) de BZ, y sea ΘA el doble de ΔZ. Pues bien, se seguirá de nuevo que ΘΓ es el do-

ble de ΓZ; de modo que ΓΘ ha sido dividida también en dos partes iguales por Z y que, por eso, el (producto) de ΘB, BΓ junto con el (cuadrado) de ZΓ es igual al (cuadrado) de BZ [II 6]. Pero se ha supuesto que el (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE es igual al (cuadrado) de BZ. De modo que también el (producto) de ΘB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓZ será igual al (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE; lo cual es absurdo. Luego el (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE no es menor que el (cuadrado) de BE. Pero se ha demostrado que tampoco es igual al (cuadrado) de BE. Por consiguiente el (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE no es un cuadrado. Q. E. D.

Proposición 29

Hallar dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con ella (la mayor).

Póngase, pues, una recta expresable AB y los dos números cuadrados ΓΔ, ΔE, de modo que su diferencia ΓE no sea un cuadrado [lema 1], y descríbase sobre AB el semicírculo AZB, y hágase de forma que como ΔΓ es a ΓE, así el cuadrado de BA al cuadrado de AZ [X 6 Por.], y trácese ZB.



Puesto que, como el (cuadrado) de BA es al (cuadrado) de AZ, así ΔΓ a ΓE, entonces el (cuadrado) de BA guarda con el (cuadrado) de AZ la razón que el número ΔΓ guarda con el número ΓE; luego el (cuadrado) de BA es conmensura (cuadrado) de AZ [X 6]. Pero el (cuadrado) de AB e

[X Def. 4]; luego el (cuadrado) de AZ es también expresable [*id.*]; por tanto AZ es también expresable. Y puesto que ΔΓ no guarda con ΓE la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de BA tampoco guarda con el cuadrado de AZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego AB es inconmensurable en longitud con AZ [X 9]. Por tanto BA, AZ son expresables y conmensurables sólo en cuadrado. Ahora bien, dado que, como ΔΓ es a ΓE, así el (cuadrado) de BA al (cuadrado) de AZ, entonces, por conversión, como ΓΔ es a ΔE, así el (cuadrado) de AB es al (cuadrado) de BZ [V 19 Por.; III 31; I 47]. Pero ΓΔ guarda con ΔE la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces, el cuadrado de AB guarda con el cuadrado de BZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego AB es conmensurable en longitud con BZ [X 9]. Y el (cuadrado) de AB es igual a los (cuadrados) de AZ, ZB. Luego el cuadrado de AB es mayor que el de AZ en el (cuadrado) de la (recta) BZ conmensurable con ella (AB).

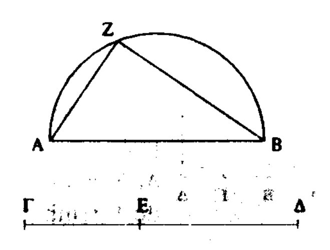
Por consiguiente, se han hallado dos rectas expresables BA, AZ conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor AB es mayor que el de la menor AZ en el cuadrado de la (recta) BZ conmensurable en longitud con ella (AB). Q. E. D.

Proposición 30

Hallar dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (la mayor).

Póngase, pues, la recta expresable AB y los dos números cuadrados ΓE, EΔ tales que su suma, ΓΔ no sea un número cua-

drado [lema 2]. Y descríbase sobre AB el semicírculo AZB, y hágase de forma que como ΔΓ es a ΓE, así el cuadrado de BA al cuadrado de AZ [X 6 Por.], y trácese ZB. De manera semejante a la (proposición) anterior demostraríamos que BA, AZ son expresables y conmensurables sólo en cuadrado. Ahora bien, dado que, como ΔΓ es a ΓE, así el (cuadrado) de BA al (cuadrado) de AZ, entonces, por conversión, como ΓΔ es a ΔE, así el (cuadrado) de AB al (cuadrado) de BZ [V 19 por.; III 31, I 47]. Pero ΓΔ no guarda con ΔE la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Entonces el (cuadrado) de AB tampoco guarda con el (cuadrado) de BZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego AB es inconmensurable en longitud con BZ [X 9]. Y el cuadrado de AB es mayor que el de AZ en el (cuadrado) de la (recta) ZB inconmensurable con ella (AB).



Por consiguiente, AB, AZ son expresables y conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de AZ en el cuadrado de la recta ZB, inconmensurable en longitud con ella (AB). Q. E. D.

Proposición 31

Hallar dos (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una (recta) conmensurable en longitud con ella (la mayor).

Pónganse las dos rectas expresables A, B conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de A que es la mayor sea mayor que el cuadrado de la menor, B, en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (A) [X 29]. Y sea el (cuadrado) de Γ igual al (rectángulo comprendido) por A, B. Pero el (rectángulo comprendido) por A, B es medial [X 21]; entonces el (cuadrado) de Γ también es medial, luego Γ es también medial [X 21]. Sea el rectángulo comprendido por ΓΔ igual al (cuadrado) de B; pero el cuadrado de B es expresable; luego el (rectángulo comprendido) por ΓΔ es también expresable. Ahora bien, dado que como A es a B, así el (rectángulo comprendido) por A, B es al (cuadrado) de B, mientras que el (cuadrado) de Γ es igual al (rectángulo comprendido) por A, B, y el (rectángulo comprendido) por Γ, Δ es igual al (cuadrado) de B, entonces, como A es a B, así el (cuadrado) de Γ al (rectángulo comprendido) por Γ, Δ. Pero, como el (cuadrado) de Γ es al (rectángulo comprendido) por Γ, Δ, así Γ es a Δ; entonces, como A es a B, así Γ a Δ. Pero A es conmensurable con B sólo en cuadrado; luego Γ es también conmensurable con Δ sólo en cuadrado [X 11]. Y es medial; por tanto Δ también es medial [X 23]. Ahora bien, dado que, como A es a B, Γ es a Δ, y el (cuadrado) de A es mayor que el de B en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (A), entonces el cuadrado de Γ es también mayor que el de Δ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (Γ) [X 14].

A B Γ Δ

Por consiguiente, se han hallado dos rectas mediales Γ, Δ conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) expresable, y el cuadrado de Γ es mayor que el de Δ en el cuadrado de una (recta) conmensurable en longitud con ella (Γ).

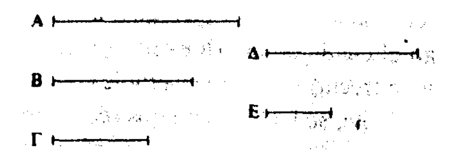
De manera semejante se demostraría que (el cuadrado de Γ es mayor que el cuadrado de Δ) en el (cuadrado) de una (recta)

inconmensurable en longitud con ella (Γ), siempre que el cuadrado de A sea mayor que el de B en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (A) [X 30] [26].

Proposición 32

Hallar dos (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo medial, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (la mayor).

Pónganse tres rectas expresables A, B, Γ conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de A sea mayor



que el de Γ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (A) [X 29]; y sea el (cuadrado) de Δ igual al (rectángulo comprendido) por A, B. Entonces el (cuadrado) de Δ es medial; luego Δ es medial [X 21]. Pero sea el (rectángulo comprendido) por Δ, E igual al (rectángulo comprendido) por B, Γ. Y dado que, como el (rectángulo comprendido) por A, B es al (rectángulo comprendido) por B, Γ, así A es a Γ; mientras que el (cuadrado) de Δ es igual al (rectángulo comprendido) por A, B y el (rectángulo comprendido) por Δ, E es igual al (rectángulo com-

[26] Al final de la proposición suplo entre paréntesis las palabras (el cuadrado de Γ es mayor que el cuadrado de Δ) sin las que el texto resultaría difícil de entender. Sigo la versión latina de Heiberg.

prendido) por B, Γ; entonces, como A es a Γ, así el cuadrado de Δ es al (rectángulo comprendido) por Δ, E. Pero como el (cuadrado) de Δ es al (rectángulo comprendido) por Δ, E, así Δ a E; luego como A es a Γ, así Δ a E. Pero A es conmensurable con Δ sólo en cuadrado. Entonces Δ es conmensurable con E sólo en cuadrado [X 11]. Pero Δ es medial. Luego E es también medial [X 23]. Ahora bien, dado que, como A es a Γ, Δ es a E, mientras que el cuadrado de A es mayor que el de Γ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (A), entonces el cuadrado de Δ será también mayor que el de E en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (Δ) [X 14].

Digo además que el (rectángulo comprendido) por Δ, E es también medial. Pues como el (rectángulo comprendido) por B, Γ es igual al (rectángulo comprendido) por Δ, E y el (rectángulo comprendido) por B, Γ es medial [X 21], entonces el (rectángulo comprendido) por Δ, E es también medial.

Por consiguiente, se han hallado dos (rectas) mediales Δ, E conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) medial, de modo que el cuadrado de la mayor es mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (la mayor).

De manera semejante se demostraría también que (el cuadrado de Δ es mayor que el de E) a su vez en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (Δ), siempre que el cuadrado de A sea mayor que el de Γ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (A)[27].

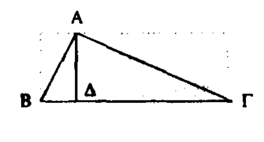
LEMA

Sea ABΓ un triángulo rectángulo que tenga recto el ángulo correspondiente a A y trácese la perpendicular AΔ.

---

[27] Como en la proposición anterior sigo la versión latina de Heiberg entre paréntesis.

Digo que el (rectángulo comprendido) por ΓB, BΔ es igual al cuadrado de BA, mientras que el (rectángulo comprendido) por BΓ, ΓΔ es igual al cuadrado de ΓA, y el (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔΓ es igual al cuadrado de AΔ y además el (rectángulo comprendido) por BΓ, AΔ es igual al (rectángulo comprendido) por BA, AΓ.



En primer lugar (digo) que el (rectángulo comprendido) por ΓB, BΔ es igual al cuadrado de BA.

Pues como, en un triángulo rectángulo, se ha trazado la perpendicular AΔ desde el ángulo recto hasta la base, entonces los triángulos ABΔ, AΔΓ son semejantes al triángulo entero ABΓ y entre sí [VI 8]. Y puesto que el triángulo ABΓ es semejante al triángulo ABΔ, entonces, como ΓB es a BA, así BA a BΔ [VI 4]; luego el (rectángulo comprendido) por ΓB, BΔ es igual al (cuadrado) de AB [VI 17].

Por lo mismo entonces, el (rectángulo comprendido) por BΓ, ΓΔ es igual también al cuadrado de AΓ.

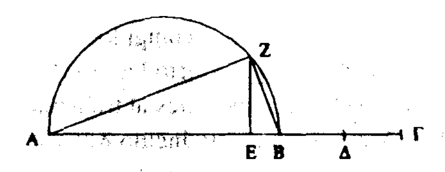
Ahora bien, dado que, si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, la recta trazada es la media proporcional de los segmentos de la base [VI 8 Por.], entonces, como BΔ es a ΔA, así AΔ a ΔΓ; luego el (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔΓ es igual al cuadrado de ΔA [VI 17].

Digo que el (rectángulo comprendido) por BΓ, AΔ es igual también al (rectángulo comprendido) por BA, AΓ. Pues como, según hemos dicho, el triángulo ABΓ es semejante al (triángulo) ABΔ, entonces, como BΓ es a ΓA, así BA a AΔ [VI 4]. Por consiguiente, el (rectángulo comprendido) por BΓ, AΔ es igual al (rectángulo comprendido) por BA, AΓ [VI 16] Q. E. D.

PROPOSICIÓN 33

Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable pero el (rectángulo comprendido) por ellas, medial.

Pónganse dos rectas expresables AB, BΓ conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor, AB,



sea mayor que el cuadrado de la menor, BΓ, en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (AB) [X 30], y divídase BΓ en dos partes iguales por el (punto) Δ, y aplíquese a AB un paralelogramo igual al cuadrado de cada una de las (rectas) BΔ, ΔΓ y deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AE, EB [VI 28]. Descríbase sobre AB el semicírculo AZB y trácese EZ formando ángulos rectos con AB y trácense AZ, ZB.

Y como AB, BΓ son dos rectas desiguales y el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de BΓ en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (AB), mientras que se ha aplicado a AB un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de BΓ, es decir, al cuadrado de su mitad, y deficiente en la figura de un cuadrado, produciendo el (rectángulo comprendido) por AE, EB, entonces AE es inconmensurable con EB [X 18]. Ahora bien, como AE es a EB, así el (rectángulo comprendido) por BA, AE al (rectángulo comprendido) por AB, BE, mientras que el (rectángulo comprendido) por BA, AE es igual al cuadrado de

AZ, y el (rectángulo comprendido) por AB, BE al cuadrado de BZ; entonces el cuadrado de AZ es inconmensurable con el cuadrado de ZB; luego AZ, ZB son inconmensurables en cuadrado. Y como AB es expresable, entonces el cuadrado de AB es también expresable. De modo que la suma de los cuadrados de AZ, ZB es también expresable [I 47]. Y puesto que a su vez el (rectángulo comprendido) por AE, EB es igual al cuadrado de EZ y se ha supuesto que el (rectángulo comprendido) por AE, EB es igual también al cuadrado de BΔ, entonces ZE es igual a BΔ; luego BΓ es el doble de ZE; de modo que el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es también conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, EZ. Pero el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es medial [X 21]; luego el (rectángulo comprendido) por AB, EZ es también medial [X 23 Por.]. Pero el (rectángulo comprendido) por AB, EZ es igual al (rectángulo comprendido) por AZ, ZB [lema]: por tanto, el (rectángulo comprendido) por AZ, ZB es también medial. Y se ha demostrado que la suma de sus cuadrados es también expresable.

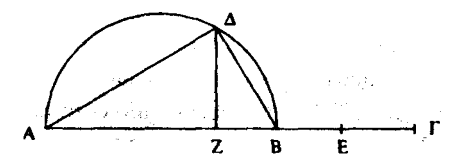
Por consiguiente, se han hallado las dos rectas AZ, ZB inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable pero el (rectángulo comprendido) por ellas, medial. Q. E. D.

Proposición 34

Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial, pero el rectángulo comprendido por ellas expresable.

Pónganse dos rectas mediales, AB, BΓ, conmensurables sólo en cuadrado, que comprendan un rectángulo expresable, de modo que el cuadrado de AB sea mayor que el de BΓ en el

(cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AB) [X 31 *ad finem*] y descríbase sobre AB el semicírculo AΔB, y divídase



AΓ en dos partes iguales por el (punto) E, y aplíquese a la recta AB un paralelogramo igual al (cuadrado) de BE deficiente en la figura de un cuadrado, es decir, el (rectángulo comprendido) por AZ, ZB [VI 28]. Entonces AZ es inconmensurable en longitud con ZB [X 18]. Trácese ZΔ, desde Z, formando ángulos rectos con AB, y trácense AΔ, ΔB.

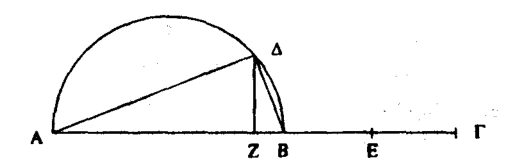
Como AZ es inconmensurable con ZB, entonces el (rectángulo comprendido) por BA, AZ es inconmensurable también con el (rectángulo comprendido) por AB, BZ [X 11]. Pero el (rectángulo comprendido) por BA, AZ es igual al (cuadrado) de AΔ, y el (rectángulo comprendido) por AB, BZ (es igual) al (cuadrado) de ΔB; entonces el (cuadrado) de AΔ es también inconmensurable con el (cuadrado) de ΔB. Y como el (cuadrado) de AB es medial, entonces la suma de los (cuadrados) de AΔ, ΔB es también medial [III 31; I 47]. Y como BΓ es el doble de ΔZ, entonces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es también el doble del (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ. Pero el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable; luego el (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ es también expresable [X 6]. Pero el (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ es igual al (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB [lema]; de modo que el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB es también expresable.

Por consiguiente, se han hallado las dos rectas AΔ, ΔB inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial, pero el rectángulo comprendido por ellas expresable.

Proposición 35

Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas medial y además inconmensurable con la suma de sus cuadrados.

Pónganse dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado AB, BΓ que comprendan un (rectángulo) medial, de



modo que el cuadrado de AB sea mayor que el cuadrado de BΓ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AB) [X 32]. Y descríbase sobre AB el semicírculo AΔB, y sea semejante a la anterior el resto (de la construcción).

Ahora bien, como AZ es inconmensurable en longitud con ZB [X 18], AΔ es también inconmensurable en cuadrado con ΔB [X 11]. Y como el (cuadrado) de AB es medial, entonces la suma de los (cuadrados) de AΔ, ΔB es también medial [III 31; I 47]. Ahora bien, como el (rectángulo comprendido) por AZ, ZB es igual al (cuadrado) de cada una de las (rectas) BE, ΔZ, entonces BE es igual a ΔZ; luego BΓ es el doble de ZΔ; de modo que el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es el doble del (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ; por tanto, el (rectángulo comprendido por AB, BΓ es medial; entonces el (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ es también medial [X 32 Por.]. Y también es igual al (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB [Lema si-

guiente a X 32]; luego el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB es también medial. Ahora bien, como AB es inconmensurable en longitud con BΓ, mientras que ΓB es conmensurable con BE, entonces AB es inconmensurable en longitud con BE [X 13]; de modo que el (cuadrado) de AB es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BE [X 11]. Pero los (cuadrados) de AΔ, ΔB son iguales al (cuadrado) de AB [I 47], mientras que el (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ, es decir, el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB es igual al (rectángulo comprendido) por AB, BE; por tanto, la suma de los (cuadrados) AΔ, ΔB es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB.

Por consiguiente, se han hallado las dos rectas AΔ, ΔB inconmensurables en cuadrado, que hacen la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas medial y además inconmensurable con la suma de sus cuadrados. Q. E. D.

Proposición 36

Si se suman dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, la (recta) entera no es expresable; llámesela binomial.

Súmense, pues, las dos (rectas) expresables AB, BΓ conmensurables sólo en cuadrado.

Digo que el total AΓ no es expresable.

Pues, dado que AB es inconmensurable en longitud con BΓ, porque son conmensurables sólo en cuadrado, mientras que, como AB es a BΓ, así el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ al (cuadrado) de BΓ, entonces, el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es inconmensurable con el (cuadrado) de BΓ [X 11]. Pero el doble del (rectán-

A B Γ

gulo comprendido) por AB, BΓ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 6], mientras que los (cuadrados) de AB, BΓ son conmensurables con el (cuadrado) de BΓ, porque AB, BΓ son expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 15], luego el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es inconmensurable con los (cuadrados) de AB, BΓ. Y, por composición, el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ junto con los (cuadrados) de AB, BΓ, es decir, el (cuadrado) de AΓ [II 4], es inconmensurable con la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ [X 16]: pero la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es expresable; entonces el cuadrado de AΓ no es expresable; de modo que AΓ tampoco es expresable; llámesela binomial. Q. E. D.[28].

---

[28] A partir de aquí comienza la denominación, clasificación y descripción de propiedades de tipos de rectas sin razón expresable producidas por la suma o diferencia de dos rectas expresables inconmensurables.

Según FOWLER (art. cit.) el libro X sistematiza pequeños grupos de entre la infinidad de rectas sin razón expresable posibles. Taisbak, por su parte, relaciona la denominación, selección y clasificación de estos tipos de rectas con la motivación subyacente, a su juicio, en el libro X de los *Elementos*, a saber: dar los pasos previos necesarios para explicar el lado del pentágono regular y sus relaciones con el diámetro del círculo y los lados del hexágono y decágono regulares que serán expuestas en el libro XIII. Según esta teoría, el término «binomial» respondería a que el diámetro del círculo es la suma de dos lados de cuadrados que no pueden reducirse a uno pero de los que puede hablarse por separado *ek dýo onomátōn*, mientras que el lado del decágono es la diferencia (apótoma) entre los mismos lados de cuadrados.

Las razones de estos nombres así como de otras denominaciones aparentemente más oscuras de tipos de rectas «no expresables» que van surgiendo a lo largo del libro X («mayor», «menor», etc.) probablemente se olvidaron, pero los nombres se mantuvieron junto con las definiciones de sus características. No es de extrañar que los griegos, que están fijando una terminología específica en sus usos de *lógos, dýnamis, rhētós*, etc., especialicen términos como *meídsōn* o *elássōn* para referirse a las rectas que se dividen de la misma manera que la diagonal y el lado del pentágono regular, las rectas «mayor» y «menor» respectivamente.

PROPOSICIÓN 37

Si se suman dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable, la (recta) entera no es expresable; llámesela primera bimedial.

Súmense, pues, las dos rectas mediales AB, BΓ conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable.

Digo que el total AΓ no es expresable.

Pues como AB es inconmensurable en longitud con BΓ, entonces los (cuadrados) de AB, BΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 36; II 9-20]. Ahora bien, por composición, los (cuadrados) de AB, BΓ junto con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ, que es precisamente el (cuadrado) de AΓ [II 4], es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; y el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable; porque se ha supuesto que AB, BΓ comprenden un (rectángulo) expresable. Por tanto, el cuadrado de AΓ no es expresable [X Def. 4]; llámesela primera bimedial [29].

A B Γ

[29] Aparte de los dos bloques de seis tipos de rectas cada uno, que se agrupan bajo las denominaciones «binomial» y «apótoma» y que serán definidos en las segundas y terceras definiciones respectivamente, aparece en el libro X otra serie de rectas de las que no hay definiciones explícitas. Es el caso de la «primera bimedial» y la «segunda bimedial».

Como explica FOWLER (art. cit., pág. 259) se trata de una clasificación general que abarca trece tipos de rectas, entre las que se contaría la primera bimedial, que no se verá expuesta con claridad hasta el final del libro (X 111). En esta clasificación general no se definen expresamente las rectas que la componen. Hay además una subclasificación de dos bloques de rectas «binomiales» y «apótomas» en seis tipos diferentes cada una que están explícita-

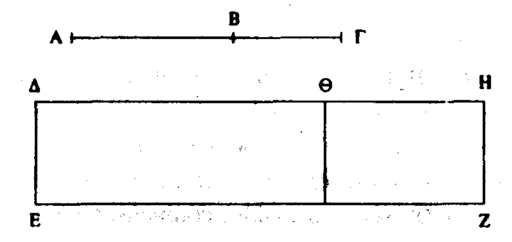
Proposición 38

Si se suman dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial, la (recta) entera no es expresable; llámesela segunda bimedial.

Súmense, pues, las dos (rectas) mediales AB, BΓ conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial.

Digo que AΓ no es expresable.

Póngase, pues, la (recta) expresable ΔE y aplíquese a ΔE el rectángulo ΔZ igual al (cuadrado) de AΓ, de modo que produz-



ca la anchura ΔH [I 44]. Y como el (cuadrado) de AΓ es igual a los (cuadrados) de AB, BΓ y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [II 4], aplíquese ahora a ΔE el (rectángulo) EΘ igual a los (cuadrados) de AB, BΓ; entonces el (rectángulo) restante ΘZ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ. Y como cada una de las (rectas) AB, BΓ es medial, entonces los (cuadrados) de AB, BΓ son también mediales. Pero se ha supuesto que el doble del (rectángulo comprendido) por

mente definidas bajo los rótulos «Segundas definiciones» y «Terceras definiciones» respectivamente. Según Fowler, esta subclasificación responde al mecanismo interno al libro X de hallar rectas sin razón expresable.

AB, BΓ es también medial. Y EΘ es igual a los (cuadrados) de AB, BΓ, mientras que ZΘ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; entonces cada uno de los (rectángulos) EΘ, ΘZ es medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable ΔE; luego cada una de las (rectas) ΔΘ, ΘH es expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Así pues, dado que AB es inconmensurable en longitud con BΓ, y que, como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de AB al (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; entonces el (cuadrado) de AB es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 11]. Pero la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es conmensurable con el (cuadrado) de AB [X 15], y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 6]. Por tanto, la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 13]. Pero EΘ es igual a los (cuadrados) de AB, BΓ, y ΘZ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ. Luego EΘ es inconmensurable con ΘZ; de modo que ΔΘ es también inconmensurable en longitud con ΘH [VI 1]. Entonces ΔΘ, ΘH son expresables conmensurables sólo en cuadrado. De modo que ΔH no es expresable [X 36]. Pero ΔE es expresable; y el rectángulo comprendido por una (recta) no expresable y una expresable no es expresable [X 20]; entonces el área ΔZ no es expresable, y el lado del cuadrado igual a ella no es expresable [X Def. 4]. Pero AΓ es el lado del cuadrado igual a ΔZ; por consiguiente AΓ no es expresable; llámesela segunda bimedial. Q. E. D.

Proposición 39

Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable y el (rectángulo

comprendido) por ellas medial; la (recta) entera no es expresable; llámesela «mayor».

Súmense pues las dos rectas AB, BΓ inconmensurables en cuadrado que cumplan las condiciones propuestas [X 33].

Digo que AΓ no es expresable.

Pues como el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es medial, el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es medial [X 6 y 23 Por.]. Pero la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es expresable; entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es inconmensurable con la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ; de modo que los (cuadrados) de AB, BΓ junto con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ, que es precisamente el cuadrado de AΓ también es inconmensurable con la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ [X 16]. Por consiguiente, el (cuadrado) de AΓ no es expresable; de modo que AΓ tampoco es expresable [X Def. 4]; llámesela «mayor». Q. E. D. [30].

A B Γ

PROPOSICIÓN 40

Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable, la (recta) entera no es expresable; llámesela lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial.

[30] La «mayor» es otra de las rectas que pertenecen a la clasificación que hemos llamado general y que no se definen expresamente. Según Taisbak, su nombre obedece probablemente a que corresponde a la recta «mayor» del pentágono regular que es la diagonal.

Súmense, pues, las dos rectas AB, BΓ inconmensurables en cuadrado que cumplan las condiciones propuestas [X 34].

Digo que AΓ no es expresable.

Pues como la suma de los cuadrados de AB, BΓ es medial, el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable, entonces la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 16]. De modo que también el (cuadrado) de AΓ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable; luego el cuadrado de AΓ no es expresable. Por tanto, AΓ no es expresable; llámesela lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial. Q. E. D.[31].

Proposición 41

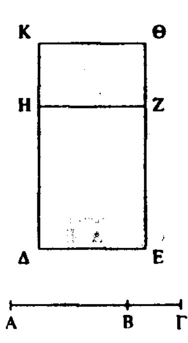
Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas también medial e inconmensurable además con la suma de sus cuadrados, entonces la (recta) entera no es expresable; llámesela lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Súmense, pues, las dos rectas AB, BΓ inconmensurables en cuadrado que cumplan las condiciones propuestas [X 35].

Digo que AΓ no es expresable.

[31] El «lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial» es la sexta recta sin razón expresable que aparece en la clasificación general.

Póngase la recta expresable ΔE y aplíquese a ΔE el (rectángulo) ΔZ igual a los (cuadrados) de AB, BΓ y el (rectángulo) HΘ igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; entonces el (rectángulo) entero ΔΘ es igual al (cuadrado) de AΓ [II 4] y como la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es medial y es igual a ΔZ, entonces ΔZ es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔE; luego ΔH es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Por lo mismo, HK es también expresable e inconmensurable en longitud con HZ, es decir, con ΔE. Y como los (cuadrados) de AB, BΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ, ΔZ es inconmensurable con HΘ; de manera que ΔH también es inconmensurable con HK [VI 1, X 11]. Y son expresables; entonces ΔH, HK son conmensurables sólo en cuadrado; luego ΔK, la llamada binomial, no es expresable [X 36]. Pero ΔE es expresable; entonces el (rectángulo) ΔΘ no es expresable, y el lado del cuadrado igual a él no es expresable [X Def. 4]. Pero AΓ es el lado del cuadrado igual a ΘΔ. Por tanto, AΓ no es expresable; llámesela lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales. Q. E. D. [32].



LEMA

Y que las antedichas rectas no expresables se dividen de una sola manera en las rectas de las que se componen dando lugar a los tipos propuestos lo demostraremos enseguida, después de adelantar el siguiente lema.

---

[32] En esta proposición se nos muestra la séptima recta sin razón expresable de la clasificación general: «lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales».

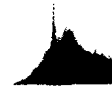
Póngase una recta AB y córtese la (recta) entera en partes desiguales por cada uno de los puntos Γ, Δ; y supóngase que AΓ es mayor que ΔB.

Digo que los cuadrados de AΓ, ΓB son mayores que los cuadrados de AΔ, ΔB.

Divídase, pues, AB en dos partes iguales por el (punto) E. Y como AΓ es mayor que ΔB, quítese de ambos ΔΓ; entonces la (recta) restante AΔ es mayor que la (recta) restante ΓB. Pero AE es igual a EB; entonces ΔE es menor que EΓ; luego los (puntos) Γ, Δ no están a igual distancia del punto de bisección. Y como el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB junto con el (cuadrado) de EΓ es igual al (cuadrado) de EB [II 5], mientras que el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB junto con el (cuadrado) de ΔE es igual al (cuadrado) de EB [id.], entonces el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB junto con el (cuadrado) de EΓ es igual al (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB junto con el (cuadrado) de ΔE; de los cuales el (cuadrado) de ΔE es menor que el (cuadrado) de EΓ; luego el (rectángulo) restante (comprendido) por AΓ, ΓB es menor que el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB. De modo que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es también menor que el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB.

Por consiguiente, el resto, la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es mayor que la suma de los (cuadrados) de AΔ, ΔB. Q. E. D.[33].

[33] En el lema aparece la expresión *poiousôn tà prokeímena eídē* «dando lugar a los tipos propuestos». La palabra *eídē*, por contar con un campo semántico tan amplio, resulta sumamente ambigua, la traduzco por «tipos» (de rectas sin razón expresable). La expresión en su conjunto también podría significar aquí «cumpliendo las condiciones propuestas».



Proposición 42

La recta binomial se divide en sus términos por un sólo punto.

Sea dividida en sus términos la (recta) binomial AB por el (punto) Γ; entonces AΓ, ΓB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 36].

Digo que AB no se divide por otro punto en dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado.

A

Δ

Γ

B

Pues, si es posible, divídase también por el (punto) Δ, de modo que AΔ, ΔB sean (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Entonces queda claro que AΓ no es la misma que ΔB. Pues, si es posible, séalo. Entonces AΔ será también la misma que ΓB; y como AΓ es a ΓB, así será BΔ a ΔA, AB resultará dividida también por el punto Δ de la misma manera que por el punto Γ; lo cual precisamente se ha supuesto que no. Luego AΓ no es la misma que ΔB. Por eso los puntos Γ, Δ tampoco están a igual distancia del punto de bisección. Luego en aquello en lo que los (cuadrados) de AΓ, ΓB difieren de los (cuadrados) de AΔ, ΔB, en eso difieren también el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, porque, tanto los (cuadrados) de AΓ, ΓB junto con el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, como los (cuadrados) de AΔ, ΔB junto con el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB son iguales al (cuadrado) de AB [II 4]. Pero los (cuadrados) de AΓ, ΓB difieren de los (cuadrados) de AΔ, ΔB en un área expresable; pues ambos son expresables; luego el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB también difiere del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB en un área expresable, aún siendo medial [X 21]; lo cual es ab-

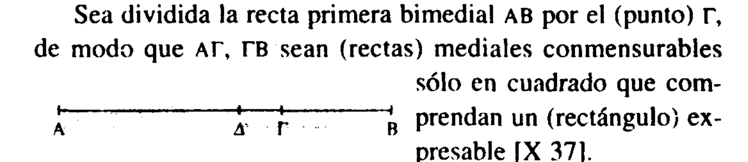
surdo; porque un (área) medial no excede a otra (área) medial en un (área) expresable [X 26].

Por consiguiente, la recta binomial no se divide por diferentes puntos; luego se divide por uno sólo. Q. E. D.

Proposición 43

La recta primera bimedial se divide por un sólo punto.

Sea dividida la recta primera bimedial AB por el (punto) Γ, de modo que AΓ, ΓB sean (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable [X 37].



Digo que AB no se divide por otro punto.

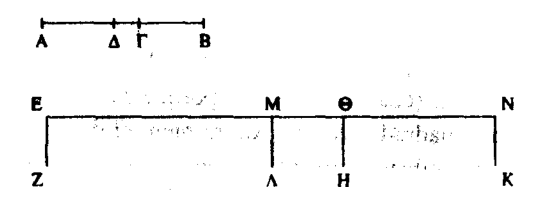
Pues, si es posible, divídase también por el (punto) Δ, de modo que las rectas AΔ, ΔB sean (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que contengan un (rectángulo) expresable. Pues como en aquello en que difiere el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB, del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, en eso difieren los (cuadrados) de AΓ, ΓB de los (cuadrados) de AΔ, ΔB, mientras que el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB difiere del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB en un (área) expresable, porque ambas son expresables, entonces los (cuadrados) de AΓ, ΓB difieren también de los (cuadrados) de AΔ, ΔB en un (área) expresable, aun siendo mediales; lo cual es absurdo [X 26].

Por consiguiente, la (recta) primera bimedial no se divide en sus términos por diferentes puntos; luego se divide por uno sólo. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 44

La recta segunda bimedial se divide por un sólo punto.

Sea dividida la (recta) segunda bimedial AB por el punto Γ, de modo que AΓ, ΓB sean (rectas) mediales conmensurables



sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo medial [X 38]; entonces queda claro que Γ no es el punto de bisección, porque los segmentos no son conmensurables en longitud.

Digo que AB no se divide por otro punto.

Pues, si es posible, divídase por el (punto) Δ, de modo que AΓ no sea la misma que ΔB, sino que AΓ sea por hipótesis mayor; entonces es evidente que los (cuadrados) de AΔ, ΔB, según hemos demostrado más arriba [Lema] también son menores que los (cuadrados) de AΓ, ΓB; supóngase que AΔ, ΔB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial. Y póngase la (recta) expresable EZ, y aplíquese a EZ un paralelogramo rectángulo, EK, igual al (cuadrado) de AB; quítese, por otra parte, EH igual a los (cuadrados) de AΓ, ΓB; entonces el resto ΘK es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB [II 4]. Quítese, a su vez, EΛ igual a los (cuadrados) de AΓ, ΓB que precisamente se ha demostrado que son menores que los de AΓ, ΓB [Lema]; entonces el (rectángulo) restante MK es también igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB. Y como los (cuadrados)

de AΓ, ΓB son mediales, entonces EH es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ, luego EΘ es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Por lo mismo, entonces, ΘN es también expresable e inconmensurable en longitud con EZ. Y puesto que AΓ, ΓB son mediales y conmensurables sólo en cuadrado, entonces AΓ es inconmensurable en longitud con ΓB. Pero, como AΓ es a ΓB, así el (cuadrado) de AΓ es al (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB; entonces el (cuadrado) de AΓ es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB [X 11]: pero los (cuadrados) de AΓ, ΓB son conmensurables con el (cuadrado) de AΓ; porque AΓ, ΓB son conmensurables en cuadrado [X 15]. Ahora bien, el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB [X 6]. Entonces los (cuadrados) de AΓ, ΓB son también inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB [X 13]. Pero EH es igual a los (cuadrados) de AΓ, ΓB, mientras que ΘK es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB; luego EH es inconmensurable con ΘK; de modo que EΘ es también inconmensurable en longitud con ΘN [VI 1; X 11]. Y son expresables; entonces EΘ, ΘN son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Pero si se suman dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, la recta entera, la llamada binomial, no es expresable; entonces EN es una (recta) binomial dividida por el (punto) Θ. Siguiendo el mismo procedimiento se demostraría que EM, MN son expresables y conmensurables sólo en cuadrado; y EN será una (recta) binomial dividida por los puntos diferentes Θ, M; ahora bien, EΘ no es la misma que MN, porque los (cuadrados) de AΓ, ΓB son mayores que los (cuadrados) de AΔ, ΔB. Pero los cuadrados de AΔ, ΔB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB; luego los (cuadrados) de AΓ, ΓB, es decir EH, son mucho mayores que el doble del (rectángulo comprendi-



do) por AΔ, ΔB, es decir, MK; de modo que EΘ es también mayor que MN.

Por consiguiente, EΘ no es la misma que MN. Q. E. D.

Proposición 45

La recta «mayor» se divide por uno y el mismo punto.

Sea dividida la recta «mayor» AB por el (punto) Γ de modo que AΓ, ΓB sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de los cuadrados de AΓ, ΓB expresable, pero el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB medial [X 39].

A
Δ
Γ
B

Digo que AB no se divide por otro punto.

Pues, si es posible, divídase también por el (punto) Δ de modo que AΔ, ΔB sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma se los cuadrados de AΔ, ΔB expresable, pero el (rectángulo comprendido) por ellas medial. Y como en aquello en que los (cuadrados) de AΓ, ΓB difieren de los (cuadrados) de AΔ, ΔB, en eso difiere también el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, mientras que los (cuadrados) de AΓ, ΓB exceden a los (cuadrados) de AΔ, ΔB en un (área) expresable, porque ambos son expresables; entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB también excede del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB en un (área) expresable, aun siendo mediales; lo cual es imposible [X 26]. Luego la (recta) «mayor» no se divide por diferentes puntos. Por consiguiente, se divide sólo por uno y el mismo punto. Q. E. D.



Proposición 46

El lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial se divide sólo por un punto.

Sea dividido el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más un área medial AB por el punto Γ, de modo que AΓ, ΓB sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB medial, y el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΔB expresable [X 40].

A
Δ
Γ
B

Digo que AB no se divide por otro punto.

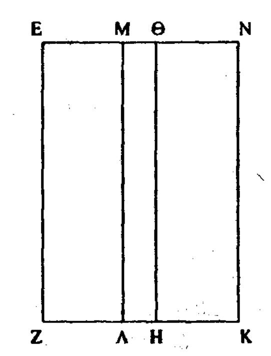
Pues, si es posible, divídase también por el (punto) Δ, de modo que AΔ, ΔB sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de los (cuadrados) de AΔ, ΔB medial y el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB expresable. Pues como en aquello en que difiere el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB del doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB, en eso difieren también los (cuadrados) de AΔ, ΔB de los (cuadrados) de AΓ, ΓB y el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB excede del doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB en un (área) expresable, entonces los (cuadrados) de AΔ, ΔB también exceden a los (cuadrados) de AΓ, ΓB en un (área) expresable, aún siendo mediales; lo cual es imposible [X 26]. Luego el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más un (área) medial no se divide por diferentes puntos.

Por consiguiente, se divide por un solo punto. Q. E. D.

Proposición 47

El lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales se divide por un sólo punto.

Sea dividida AB por el punto Γ, de modo que AΓ, ΓB sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de los cuadrados de AΓ, ΓB medial y el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB medial también e inconmensurable con la suma de sus cuadrados.



Digo que AB no se divide por otro punto cumpliendo las condiciones propuestas.

Pues, si es posible, divídase por el (punto) Δ de modo que sea evidente que AΓ no es la misma que ΔB, sino mayor que AΓ por hipótesis.

Y póngase la (recta) expresable EZ, y aplíquese a EZ el (rectángulo) EH igual a los (cuadrados) de AΓ, ΓB, y el rectángulo ΘK igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB; entonces el (rectángulo) entero EK es igual al cuadrado de AB [II 4]. Aplíquese, a su vez, a EZ el (rectángulo) EΛ igual a los (cuadrados) de AΔ, ΔB; entonces, el resto, el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB es igual al resto MK. Y como se ha supuesto que la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es medial, entonces EH también es medial. Y se ha aplicado a la (recta expresable) EZ. Luego ΘE es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Por lo mismo, entonces, ΘN es una recta expresable inconmensurable en longitud con EZ. Y como la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es inconmensurable con

el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ, entonces ΕΗ es inconmensurable con ΗΝ; de modo que ΕΘ es inconmensurable con ΘΝ [VI 1; X 11]. Y son expresables; entonces ΕΘ, ΘΝ son expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΕΝ es una (recta) binomial dividida por el (punto) Θ [X 36]. De manera semejante demostraríamos que también se divide por el (punto) Μ. Ahora bien, ΕΘ no es la misma que ΜΝ; entonces una (recta) binomial se ha dividido por dos puntos diferentes; lo cual es absurdo [X 42]. Luego el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales no se divide por dos puntos diferentes.

Por consiguiente, se divide por uno sólo.

SEGUNDAS DEFINICIONES [34]

1. Dada una recta expresable y otra binomial dividida en sus términos, de forma que el cuadrado del término mayor sea mayor que el cuadrado del (término) menor en el (cuadrado) de una recta conmensurable en longitud con él (el mayor); si el término mayor es conmensurable en longitud con la recta expresable dada, llámese (la recta entera) *primera binomial.*
2. Y si el término menor es conmensurable en longitud con la (recta) expresable, llámese (la recta entera) *segunda binomial.*

---

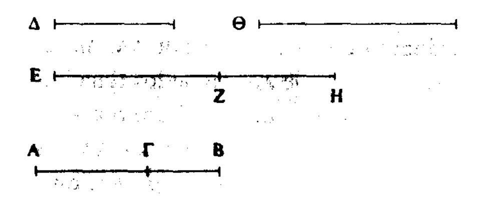
[34] Tras los siete primeros tipos de rectas (medial, binomial, primera bimedial, segunda bimedial, mayor, lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial y lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales) y sus propiedades, Euclides presenta en estas Segundas Definiciones una subclasificación de las binomiales en seis tipos diferentes. En las proposiciones 48-53 enseña la forma de hallar cada una de ellas.

3. Pero si ninguno de los términos es conmensurable en longitud con la recta expresable dada, llámese (la recta entera) *tercera binomial.*
4. Si el cuadrado del término mayor es, a su vez, mayor (que el del menor) en el cuadrado de una (recta) inconmensurable en longitud con el mayor, entonces, si el término mayor es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, llámese (la recta entera) *cuarta binomial.*
5. Pero si (lo es) el menor, *quinta.*
6. Y si ninguno de los dos, *sexta.*

Proposición 48

Hallar una recta primera binomial

Pónganse dos números ΑΓ, ΓΒ de modo que su suma ΑΒ guarde con ΒΓ la razón que un número cuadrado guarda con un



número cuadrado, pero no guarde con ΓΑ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado [Lema 1 después de X 28]. Y póngase una recta expresable Δ, y sea la recta ΕΖ conmensurable en longitud con Δ. Entonces ΕΖ es también expresable. Y como el número ΒΑ es al número ΑΓ, sea así el cuadrado de ΕΖ al cuadrado de ΖΗ [X 6 Por.]. Pero ΑΒ guarda con ΑΓ la razón que un número guarda con un número; entonces el cuadrado de ΕΖ guarda también con el cuadrado de

ZH la razón que un número guarda con un número; de modo que el (cuadrado) de EZ es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Y EZ es expresable, luego ZH es también expresable. Ahora bien, dado que BA no guarda con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el cuadrado de EZ tampoco guarda con el cuadrado de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego EZ es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Entonces EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Luego EH es binomial [X 36].

Digo que también es primera.

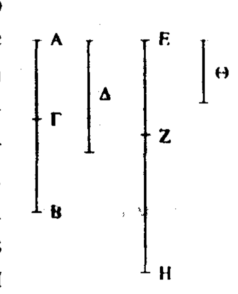
Pues, dado que como el número BA es al (número) AΓ, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH, y que BA es mayor que AΓ, entonces, el (cuadrado) de EZ es también mayor que el (cuadrado) de ZH. Sean, pues, los (cuadrados) de ZH, Θ iguales al (cuadrado) de EZ. Y dado que, como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH, entonces, por conversión, como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de Θ [V 19 Por.]. Pero AB guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de EZ guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego EZ es conmensurable en longitud con Θ [X 9]; por tanto, el cuadrado de EZ es mayor que el (cuadrado) de ZH en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (EZ). Y EZ, ZH son (rectas) expresables, y EZ es conmensurable en longitud con Δ.

Por consiguiente EH es una primera binomial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 49

Hallar una (recta) segunda binomial.

Pónganse dos números AΓ, ΓB de modo que su suma AB guarde con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pero no guarde con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, y póngase la recta expresable Δ, y sea la recta EZ conmensurable en longitud con Δ; entonces EZ es expresable. Y hágase de forma que, como el número ΓA es al número AB, sea así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de EZ es conmensurable con el cuadrado de ZH [X 6]. Luego ZH es expresable. Ahora bien, dado que el número ΓA no guarda con el (número) AB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ni el cuadrado de EZ guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces EZ es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]; luego EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, EH es binomial.



Hay que demostrar ahora que también es segunda.

Pues, dado que, por inversión, como el número BA es al (número) AΓ, así el (cuadrado) de HZ al (cuadrado) de ZE, mientras que BA es mayor que AΓ; entonces el cuadrado de HZ es mayor que el (cuadrado) de ZE.

Sean los (cuadrados) de EZ, Θ iguales al (cuadrado) de HZ; entonces, por conversión, como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de Θ [V 19 Por.]. Pero AB guarda con BΓ la

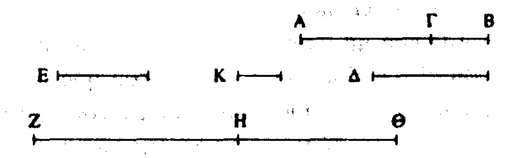
razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego el (cuadrado) de ZH guarda también con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Por tanto, ZH es conmensurable en longitud con Θ [X 9]; de modo que el cuadrado de ZH es mayor que el cuadrado de ZE en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZH). Ahora bien, ZH, ZE son (rectas) racionales conmensurables sólo en cuadrado, y el término menor EZ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada Δ.

Por consiguiente, EH es una segunda binomial. Q. E. D.

Proposición 50

Hallar una (recta) tercera binomial.

Pónganse dos números AΓ, ΓB de modo que su suma AB guarde con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un



número cuadrado, pero no guarde con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Póngase otro número cualquiera Δ, que no sea cuadrado y que no guarde con ninguno de los números BA, AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; póngase una recta expresable E y hágase de forma que, como Δ es a AB, sea así el (cuadrado) de E al cuadrado de la (recta) ZH [X 6 Por.]. Entonces, el cuadrado de E es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Ahora bien, E es una (recta) expresable; luego ZH es

también expresable. Y dado que Δ no guarda con AB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ni el cuadrado de E guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces E es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Hágase de forma que, como el número BA es al (número) AΓ, sea así, a su vez, el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de ZH es conmensurable con el (cuadrado) de HΘ [X 6]. Pero ZH es una (recta) expresable; entonces HΘ es también expresable. Y dado que BA no guarda con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de ΘH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Entonces ZH es inconmensurable en longitud con ΘH [X 9]. Luego ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, ZΘ es binomial [X 36].

Digo que también es tercera.

Así pues, dado que como Δ es a AB, así el (cuadrado) de E es al (cuadrado) de ZH, mientras que, como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces, por igualdad, como Δ es a AΓ, así el (cuadrado) de E al (cuadrado) de HΘ [V 22]. Pero Δ no guarda con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de E tampoco guarda con el cuadrado de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego E es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]. Ahora bien, dado que, como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces el (cuadrado) de ZH es mayor que el (cuadrado) de HΘ. Pues bien, sean los (cuadrados) de HΘ, K iguales al (cuadrado) de ZH; entonces, por conversión, como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de K [V 19 Por.]. Pero AB guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de ZH guarda con el

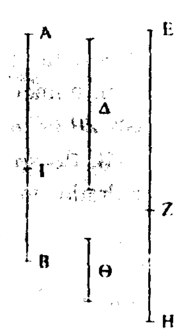
(cuadrado) de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego ZH es conmensurable en longitud con K [X 9]. Por tanto, el cuadrado de ZH es mayor que el cuadrado de HΘ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZH). Y ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y ninguna de ellas es conmensurable en longitud con E.

Por consiguiente, ZΘ es una tercera binomial. Q. E. D.

Proposición 51

Hallar una (recta) cuarta binomial.

Pónganse dos números AΓ, ΓB de modo que AB no guarde ni con BΓ, ni con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Póngase la recta expresable Δ y sea la (recta) EZ conmensurable en longitud con Δ; entonces EZ es expresable. Y hágase de forma que, como el número BA es al (número) AΓ, sea así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH [X 6 Por.]. Entonces el (cuadrado) de EZ es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Luego ZH es también expresable. Y dado que BA no guarda con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ni el (cuadrado) de EZ guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces EZ es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Luego EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; de modo que EH es binomial.



Digo ahora que también es cuarta.

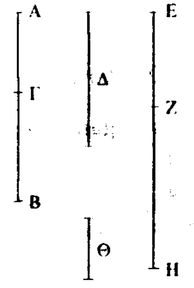
Pues, dado que como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH, entonces el (cuadrado) de EZ es mayor que el (cuadrado) de ZH. Pues bien, sean los (cuadrados) de ZH, Θ iguales al (cuadrado) de EZ; entonces, por conversión, como el número AB es al (número) BΓ, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de Θ [V 19 Por.]. Pero AB no guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de EZ tampoco guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego EZ es inconmensurable en longitud con Θ [X 9]. Por tanto, el cuadrado de EZ es mayor que el de HZ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (EZ). Ahora bien, EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y EZ es conmensurable en longitud con Δ.

Por consiguiente, EH es una cuarta binomial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 52

Hallar una (recta) quinta binomial.

Pónganse dos números AΓ, ΓB de modo que AB no guarde con ninguno de ellos la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; póngase una (recta) expresable cualquiera Δ, y sea la (recta) EZ conmensurable con Δ; entonces EZ es expresable. Hágase de forma que como ΓA es a AB, sea así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH [X 6 Por.]. Pero ΓA no guarda con AB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de EZ tampoco guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número



cuadrado. Luego EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 9]. Por tanto, EH es binomial [X 36].

Digo ahora que también quinta.

Pues, dado que, como ΓA es a AB, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH, entonces, por inversión, como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de ZE. Luego el (cuadrado) de HZ es mayor que el (cuadrado) de ZE. Pues bien, sean los (cuadrados) de EZ, Θ iguales al (cuadrado) de HZ; entonces, por conversión, como el número AB es al (número) BΓ, así el (cuadrado) de HZ al (cuadrado) de Θ [V 19 Por.]. Pero AB no guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego ZH es inconmensurable en longitud con Θ [X 9]; de modo que el (cuadrado) de ZH es mayor que el (cuadrado) de ZE en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZH). Y HZ, ZE son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el término menor EZ es conmensurable en longitud con la recta expresable dada Δ.

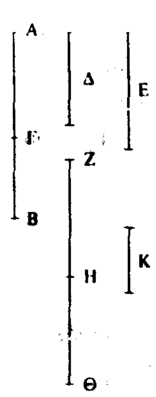
Por consiguiente, EH es una quinta binomial. Q. E. D.

Proposición 53

Hallar una (recta) sexta binomial.

Pónganse dos números AΓ, ΓB, de modo que AB no guarde con ninguno de ellos la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y haya también otro número Δ que no sea cuadrado y no guarde con ninguno de los (números) BA, AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; póngase una (recta) expresable E, y hágase de forma que, como Δ es a AB, sea así también el (cuadrado) de E

al (cuadrado) de ZH [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de E es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Ahora bien, E es expresable; luego ZH es también expresable. Y como Δ no guarda con AB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de E tampoco guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego E es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Además hágase de forma que, como BA es a AΓ, así, a su vez, el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de ZH es conmensurable con el (cuadrado) de ΘH; luego el (cuadrado) de ΘH es expresable; por tanto, ΘH es expresable. Y puesto que BA no guarda con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ni el (cuadrado) de ZH guarda con el (cuadrado) de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces ZH es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]. Luego ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto, ZΘ es binomial [X 36].



Hay que demostrar ahora que también es sexta.

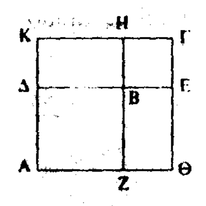
Pues bien, dado que como Δ es a AB, así el (cuadrado) de E al (cuadrado) de ZH, pero también, como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces, por igualdad, como Δ es a AΓ, así el (cuadrado) de E al (cuadrado) de HΘ [V 22]. Pero Δ no guarda con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de E no guarda con el (cuadrado) de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego E es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]. Pero se ha demostrado que es también inconmensurable con ZH; entonces cada una de

las (rectas) ZH, HΘ es inconmensurable en longitud con E. Y dado que, como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces el (cuadrado) de ZH es mayor que el (cuadrado) de HΘ. Sean, pues, los cuadrados de HΘ, K iguales al (cuadrado) de ZH; entonces, por conversión, como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de K [V 19 Por.]. Pero AB no guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; de modo que el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego ZH es inconmensurable en longitud con K [X 9]; entonces el cuadrado de ZH es mayor que el de HΘ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZH). Ahora bien, ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y ninguna de ellas es conmensurable en longitud con la recta expresable dada E.

Por consiguiente, ZΘ es una sexta binomial. Q. E. D.

LEMA

Sean AB, BΓ dos cuadrados y pónganse de modo que ΔB esté en línea recta con BE; entonces ZB está también en línea recta con BH. Complétese el paralelogramo AΓ.



Digo que AΓ es un cuadrado y que ΔH es media proporcional de AB, BΓ y además ΔΓ es media proporcional de AΓ, ΓB.

Pues como ΔB es igual a BZ, y BE a BH, entonces la (recta) entera ΔE es igual a la (recta) entera ZH. Pero ΔE es igual a cada una de las (rectas) AΘ, KΓ, mientras que ZH es igual a cada una de las (rectas) AK, ΘΓ [I 34]. Entonces, las (rectas) AΘ, KΓ son iguales respectivamente a las (rectas) AK, ΘΓ. Luego el paralelogramo AΓ es equilátero. Pero también es rectangular; entonces AΓ es un cuadrado.

Y dado que, como ZB es a BH, así ΔB a BE, mientras que, como ZB es a BH, así AB a ΔH, y como ΔB es a BE, así ΔH a BΓ [VI 1], entonces también, como AB es a ΔH, así ΔH a BΓ [V 11]; luego ΔH es media proporcional de AB, BΓ.

Digo ahora que ΔΓ es también media proporcional de AΓ, ΓB.

Pues, dado que, como AΔ es a ΔK, así KH a HΓ, porque son iguales respectivamente, y, por composición, como AK es a KΔ, así KΓ es a ΓH [V 18], mientras que, como AK es a KΔ, así AΓ a ΓΔ, y como KΓ es a ΓH, así ΔΓ a ΓB [VI 1], entonces, como AΓ es a ΔΓ, así también ΔΓ a BΓ [V 11].

Por consiguiente, ΔΓ es media proporcional de AΓ, ΓB. (Que es) lo que se ha propuesto demostrar [35].

Proposición 54

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una primera binomial, el lado del cuadrado equivalente al (área) es la (recta) no expresable llamada binomial.

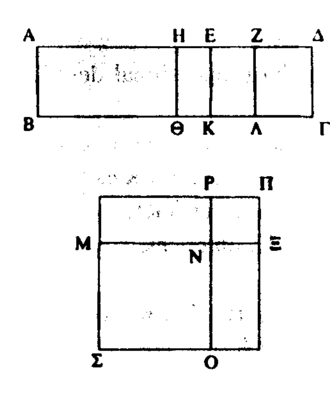
Esté comprendida, pues, el área AΓ por la (recta) expresable AB y la primera binomial AΓ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al (área) AΓ es la (recta) no expresable llamada binomial.

Pues como AΔ es una (recta) primera binomial, divídase en sus términos por el (punto) E, y sea AE el término mayor. Queda claro, entonces, que AE, EΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AE es mayor que el de EΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable

[35] Un rectángulo es media proporcional de los cuadrados de sus lados.

con ella (AE), y AE es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada AB [X Segundas definiciones 1]. Divídase, pues, EΔ en dos partes iguales por el punto Z. Y como el cuadrado de AE es mayor que el de EΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AE), entonces, si se aplica a la (recta) mayor AE un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor, es decir, al cuadrado de EZ y deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) conmensurables [X 17]. Aplíquese, pues, a AE el (rectángulo comprendido) por AH, HE igual al cuadrado de EZ; entonces AH es conmensurable en longitud con EH. Trácense, a partir de los (puntos) H, E, Θ, las rectas HΘ, EK, ZΛ paralelas a cada una de las (rectas) AB, ΓΔ; y constrúyase el cuadrado ΣN igual al paralelogramo AΘ, y el (cuadrado) NΠ igual al (paralelogramo) HK [II 14], y hágase de forma que MN esté en línea recta con NΞ; entonces PN está en línea recta con NO. Y complétese el paralelogramo ΣΠ; entonces ΣΠ es un cuadrado [Lema]. Y como el (rectángulo comprendido) por AH, HE es igual al (cuadrado) de EZ, entonces, como AH es a EZ, así ZE a EH [VI 17]; luego como AΘ es a EΛ, EΛ es a KH [VI 1]; por tanto, EΛ es media proporcional de AΘ, HK. Pero AΘ es igual a ΣN, y HK es igual a NΠ; luego EΛ es media proporcional de ΣN, NΠ. Pero MP es media proporcional de los mismos ΣN, NΠ [Lema]; luego EΛ es igual a MP; de modo que también es igual a OΞ: pero AΘ, HK son iguales a ΣN, NΠ; entonces el (paralelogramo) entero AΓ es igual al (paralelogramo) entero ΣΠ, es decir, al cuadrado de MΞ; entonces MΞ es el lado del cuadrado equivalente a AΓ.



Digo que MΞ es binomial.

Pues como AH es conmensurable con HE, AE es también conmensurable con cada una de las (rectas) AH, HE [X 15]. Pero se ha supuesto que AE es también conmensurable con AB; luego AH, HE son conmensurables con AB [X 12]; y AB es expresable, luego cada una de las (rectas) AH, HE es también expresable; por tanto, cada uno de los (rectángulos) AΘ, HK es expresable [X 19], y AΘ es conmensurable con HK. Pero AΘ es igual a ΣN y HK a NΠ; entonces ΣN, NΠ, es decir, los cuadrados de MN, NΞ son expresables y conmensurables. Ahora bien, dado que AE es inconmensurable en longitud con EΔ, mientras que AE es conmensurable con AH, y ΔE es conmensurable con EZ, entonces AH es inconmensurable con EZ [X 13], de modo que AΘ es inconmensurable con EΛ [V 1; X 11]. Pero AΘ es igual a ΣN, y EΛ a MP; entonces ΣN es inconmensurable con MP. Pero como ΣN es a MP, ON es a NP [VI 1]; luego ON es inconmensurable con NP [X 11]. Pero ON es igual a MN, y NP a NΞ. Luego MN es inconmensurable con NΞ. Y el cuadrado de MN es conmensurable con el (cuadrado) de NΞ, y cada uno de ellos es expresable; por tanto MN, NΞ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado.

Por consiguiente, MΞ es binomial y el lado del cuadrado equivalente a AΓ. Q. E. D.

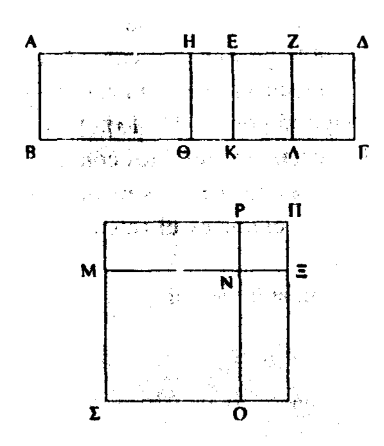
Proposición 55

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una segunda binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la recta no expresable llamada primera bimedial.

Esté, pues, comprendida el área ABΓΔ por la (recta) expresable AB y la segunda binomial AΔ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AΓ es una (recta) primera bimedial.

Pues como AΔ es una (recta) segunda binomial, divídase en sus términos por el (punto) E, de modo que AE sea el término mayor; entonces AE, EΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AE es mayor que el de EΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AE), y el término menor EΔ es conmensurable en longitud con AB [X, segundas definiciones, 2]. Divídase EΔ en dos partes iguales por el (punto) Z, y aplíquese a AE el rectángulo AHE igual al cuadrado de EZ y deficiente en la figura de un cuadrado. Entonces AH es conmensurable en longitud con HE [X 17]. Y trácense por los (puntos) H, E, Z las (rectas) HΘ, EK, ZΛ paralelas a AB, ΓΔ, y constrúyase el cuadrado ΣN, igual al paralelogramo AΘ, y el cuadrado NΠ igual al (paralelogramo) HK, y hágase de modo que MN, NΞ estén en línea recta. Entonces PN está también en línea recta con NO. Complétese el cuadrado ΣΠ; queda claro, entonces, a partir de lo demostrado anteriormente, que MP es media proporcional de ΣN, NΠ y es igual a EΛ y que MΞ es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ. Hay que demostrar ahora que MΞ es una (recta) primera bimedial. Puesto que AE es inconmensurable en longitud con EΔ, mientras que EΔ es conmensurable con AB, entonces AE es inconmensurable con AB [X 13]. Ahora bien, puesto que AH es conmensurable con EH, AE es conmensurable también con cada una de las (rectas) AH,



HE [X 15]. Pero AE es inconmensurable en longitud con AB; luego AH, HE son inconmensurables también con AB [X 13]. Por tanto BA, AH, HE (es decir: BA, AH y BA, HE) son (pares de) rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado[36]; de modo que cada uno de los (rectángulos) AΘ, HK es medial [X 21]. De manera que cada uno de los (rectángulos) AΘ, HK es medial [X 21]. De manera que cada uno de los (cuadrados) ΣN, NΠ es también medial. Entonces las (rectas) MN, NΞ son también mediales. Y dado que AH es conmensurable en longitud con HE, el (rectángulo) AΘ es conmensurable también con el (rectángulo) HK [VI 1; X 11], es decir el (cuadrado) de ΣN con el (cuadrado) de NΠ, es decir el (cuadrado) de MN con el (cuadrado) de NΞ. Ahora bien, como AE es inconmensurable en longitud con EΔ, mientras que AE es conmensurable con AH, y EΔ es conmensurable con EZ, entonces AH es inconmensurable con EZ [X 13]; de modo que el (rectángulo) AΘ es inconmensurable con el (rectángulo) EΛ, es decir el (cuadrado) ΣN con el (cuadrado) MP, esto es la (recta) ON con la (recta) NP [VI 1; X 11]. Es decir, MN es inconmensurable en longitud con NΞ. Pero se ha demostrado que MN, NΞ son tanto mediales como conmensurables en cuadrado; entonces MN, NΞ son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado.

Digo además que comprenden un (rectángulo) expresable.

Pues como se ha supuesto que ΔE es conmensurable con cada una de las (rectas) AB, EZ, entonces EZ lo es también con EK. Y cada una de ellas es expresable. Por tanto, EΛ, es decir MP es expresable [X 19]; pero MP es el rectángulo MNΞ.

[36] Suplo entre paréntesis las aclaraciones «(es decir: BA, AH y BA, HE) son (pares de)...» que no aparecen en el texto griego. Una traducción literal podría dar la impresión de que dos cualesquiera de las tres rectas citadas son conmensurables sólo en cuadrado. Ahora bien, AH, HE son, de hecho, conmensurables en longitud y únicamente las del otro par son conmensurables sólo en cuadrado.

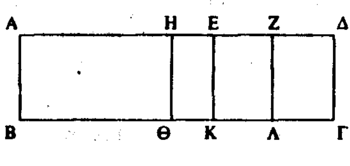
Ahora bien, si se suman dos (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo expresable, la (recta) entera no es expresable y se llama primera bimedial [X 37].

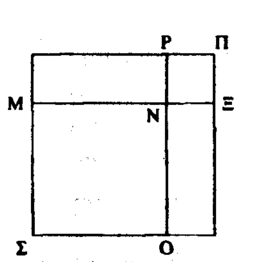
Por consiguiente, MΞ es una primera bimedial. Q. E. D.

Proposición 56

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una tercera binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) no expresable llamada segunda bimedial.

Sea, pues, comprendida el área ABΓΔ por la (recta) expresable AB y la tercera binomial AΔ dividida por el (punto) E en sus términos, de los cuales el mayor es AE.





Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AΓ es la (recta) no expresable llamada segunda bimedial.

Sígase, pues, la misma construcción de la proposición anterior. Y como AΔ es una tercera binomial, entonces AE, EΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AE es mayor que el de EΔ en el (cuadrado) de una recta conmensurable con ella (AE), y ninguno de los (términos) AE, EΔ es conmensurable en longitud con AB [X Segundas Definiciones 3].

De manera semejante a los (teoremas) anteriores demostraríamos que MΞ es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ, y MN, NΞ son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado; de modo que MΞ es bimedial.

Hay que demostrar ahora que es también segunda.

Puesto que ΔE es inconmensurable en longitud con AB, es decir con EK, mientras que ΔE es conmensurable con EZ, entonces EZ es inconmensurable en longitud con EK [X 13]. Y son expresables; entonces ZE, EK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Luego EΛ, es decir MP, es medial [X 21], y está comprendido por MN, NΞ: entonces el (rectángulo comprendido) por MN, NΞ es medial.

Por consiguiente, MΞ es una segunda bimedial.

Proposición 57

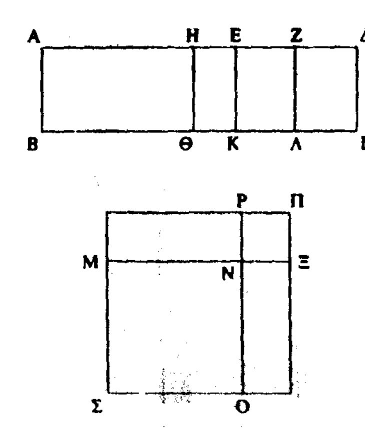
Si un área está comprendida por una recta expresable y una cuarta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) no expresable llamada «mayor».

Esté, pues, comprendida el área AΓ por la (recta) expresable AB y la cuarta binomial AΔ, dividida por el (punto) E en sus términos, de los cuales sea mayor AE.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AΓ es la (recta) no expresable llamada «mayor».

Pues como AΔ es una cuarta binomial, entonces AE, EΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AE es mayor que el de EΔ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AE), y AE es conmensurable en longitud con AB [X segundas definiciones 4]. Divídase ΔE en dos partes iguales por el (punto) Z, y aplíquese a AE un paralelogramo, el (rectángulo comprendido) por AH, HE, igual

al (cuadrado) de EZ. Entonces AH es inconmensurable en longitud con HE [X 18]; trácense HΘ, EK, ZΛ paralelas a AB, y sígase la misma construcción que en las proposiciones anteriores; queda claro, entonces, que MΞ es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ.



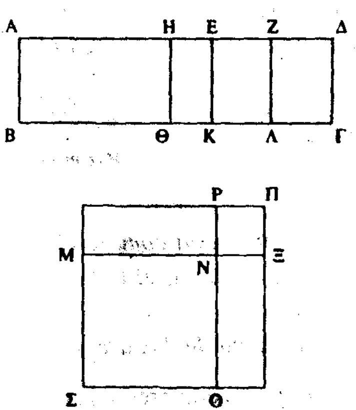
Hay que demostrar ahora que MΞ es la (recta) no expresable llamada «mayor». Puesto que AH es inconmensurable en longitud con EH, el (rectángulo) AΘ es inconmensurable también con el (rectángulo) HK, es decir el (cuadrado) ΣN con el cuadrado NΠ; entonces MN, NΞ son inconmensurables en cuadrado. Y como AE es conmensurable en longitud con AB, AK es expresable [X 19]; y es igual a los (cuadrados) de MN, NΞ; entonces la suma de los (cuadrados) de MN, NΞ es también expresable. Ahora bien, puesto que ΔE es inconmensurable en longitud con AB, es decir con EK, mientras que ΔE es conmensurable con EZ, entonces EZ es inconmensurable en longitud con EK [X 13]. Por tanto, EK, EZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΛE, es decir MP, es medial [X 21]. Y está comprendida por MN, NΞ; luego el (rectángulo comprendido) por MN, NΞ es medial. Y la [suma] de los (cuadrados) de MN, NΞ es expresable, y MN, NΞ son inconmensurables en cuadrado. Pero, si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable y el (rectángulo comprendido) por ellas medial, la recta entera no es expresable y se llama «mayor» [X 39].

Por consiguiente, MΞ es la (recta) no expresable llamada «mayor» y es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ. Q. E. D.

Proposición 58

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una quinta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) no expresable llamada lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial.

Esté, pues, comprendida el área AΓ por la (recta) expresable AB y la quinta binomial AΔ dividida en sus términos por el (punto) E, de modo que AE sea el término mayor.



Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AΓ es la (recta) no expresable llamada lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial.

Sígase la misma construcción que en las demostraciones anteriores. Queda claro, entonces, que MΞ es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ.

Hay que demostrar ahora que MΞ es el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial. Pues como AH es inconmensurable con HE [X 18], entonces AΘ es inconmensurable con ΘE [VI 1; X 11], es decir el cuadrado de

MN con el cuadrado de NΞ; entonces MN, NΞ son inconmensurables en cuadrado. Y como AΔ es una quinta bimedial, y el segmento EΔ es su segmento menor, entonces EΔ es conmensurable en longitud con AB [X segundas definiciones 5]. Pero AE es inconmensurable con EΔ; entonces AB es también inconmensurable en longitud con AE [X 13]; luego AK, es decir la suma de los (cuadrados) de MN, NΞ es medial [X 21]. Y como ΔE es conmensurable en longitud con AB, es decir con EK, mientras que ΔE es conmensurable con EZ, entonces EZ es conmensurable con EK [X 12]. Luego EK es expresable; entonces EΛ, es decir MP, esto es el (rectángulo) MNΞ es también expresable [X 19]; luego MN, NΞ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable.

Por consiguiente, MΞ es el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial [X 40] y es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ. Q. E. D.

Proposición 59

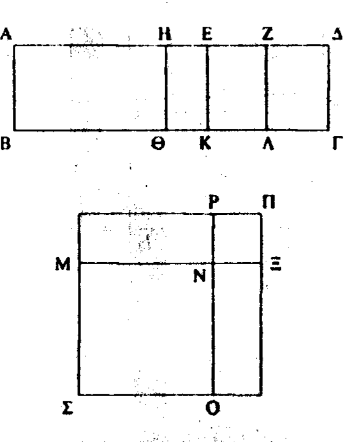
Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una sexta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la recta no expresable llamada lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Esté, pues, comprendida el área ABΓΔ por la (recta) expresable AB y la sexta binomial AΔ, dividida en sus términos por el (punto) E de modo que AE sea el término mayor.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al (área) AΓ es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales.

Sígase la misma construcción que en las demostraciones

anteriores. Queda claro, entonces, que MΞ es el lado del cuadrado equivalente al (área) AΓ y que MN es inconmensurable en cuadrado con NΞ. Y como EA es inconmensurable en longitud con AB, entonces EA, AB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; entonces AK, es decir la suma de los (cuadrados) de MN, NΞ es medial [X 21]: puesto que EΔ es a su vez inconmensurable en longitud con AB, entonces ZE es también inconmensurable en longitud con EK [X 13]; luego ZE, EK son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, por tanto EΛ, es decir MP, esto es el (rectángulo) MN, NΞ es también medial [X 21]. Y como AE es inconmensurable con EZ, AK es también inconmensurable con EΛ [VI 1; X 11]. Pero AK es la suma de los (cuadrados) de MN, NΞ y EΛ es el (rectángulo) MN, NΞ; luego la suma de los (cuadrados) de MN, NΞ es inconmensurable con el (rectángulo) MN, NΞ. Ahora bien, cada uno de ellos es medial y las (rectas) MN, NΞ son inconmensurables en cuadrado.



Por consiguiente, MΞ es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales [X 41] y el lado del cuadrado equivalente a AΓ. Q. E. D.

[LEMA

Si una línea recta se corta en (partes) desiguales, los cuadrados de las (partes) desiguales son mayores que el doble del rectángulo comprendido por las partes desiguales.

Sea AB la recta y córtese en partes desiguales por el (punto) Γ, y sea AΓ la mayor.

Digo que los (cuadrados) de AΓ, ΓB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB.

Divídase AB en dos partes iguales por el (punto) Δ. Pues bien, como una línea recta ha sido cortada en (partes) iguales por el (punto) Δ y en (partes) desiguales por el (punto) Γ, entonces el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB junto con el (cuadrado) de ΓΔ es igual al (cuadrado) de AΔ [II 5]; de modo que el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es menor que el (cuadrado) de AΔ; luego el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es menor que el doble del (cuadrado) de AΔ. Pero los (cuadrados) de AΓ, ΓB son el doble de los de AΔ, ΔΓ [II 9].

Por consiguiente, los (cuadrados) de AΓ, ΓB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB. Q. E. D.][37].

Proposición 60

El cuadrado de una binomial aplicado a una recta expresable produce como anchura una primera binomial.

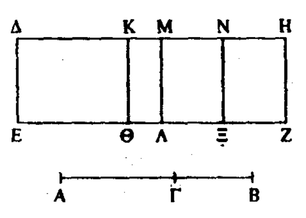
Sea la (recta) binomial AB dividida en sus términos por el (punto) Γ de modo que AΓ sea el término mayor; y póngase la (recta) expresable ΔE, y aplíquese a ΔE el (paralelogramo) ΔEZH igual al cuadrado de AB y que produzca la anchura ΔH.

Digo que ΔH es una primera binomial.

---

[37] Heiberg atetiza este lema y considera que es poco verosímil que lo haya intercalado el propio Euclides pues lo ha utilizado tácitamente en X 44.

Pues aplíquese a ΔE el (rectángulo) ΔΘ igual al (cuadrado) de AΓ, y el (rectángulo) KΛ igual al (cuadrado) de BΓ; entonces el resto, el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es igual a MZ. Divídase la (recta) MH en dos partes iguales por el (punto) N y trácese NΞ paralela [a cada una de las (rectas) MΛ, HZ]. Entonces cada uno de los (rectángulos) MΞ, NZ es igual a una vez el (rectángulo) AΓ, ΓB. Y como AB es una binomial dividida en sus términos por el (punto) Γ, entonces AΓ, ΓB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 36]; luego los (cuadrados) de AΓ, ΓB son expresables y conmensurables entre sí; de modo que la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es también expresable [X 15]. Y es igual a ΔΛ. Entonces ΔΛ es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔE, luego la (recta) ΔM es expresable y conmensurable en longitud con ΔE [X 20]. Puesto que AΓ, ΓB son a su vez (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, es decir MZ es medial [X 21]. Y se ha aplicado a la (recta) expresable MΛ; entonces la (recta) MH es también expresable e inconmensurable en longitud con MΛ, es decir con ΔE [X 22]. Pero MΔ es también expresable y conmensurable en longitud con ΔE; entonces ΔM es inconmensurable en longitud con MH [X 13]. Y son expresables; entonces ΔM, MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΔH es binomial [X 36].



Hay que demostrar que también es primera.

Pues como el (rectángulo) AΓ, ΓB es media proporcional de los (cuadrados de AΓ, ΓB [Lema después de X 53], entonces MΞ es también media proporcional de ΔΘ, KΛ; por tanto, como ΔΘ es a MΞ, así MΞ a KΛ, es decir, como ΔK es a MN, así MN a MK [VI 1]; luego el (rectángulo comprendido) por ΔK, KM es

igual al (cuadrado) de MN [VI 17]. Y como el (cuadrado) de AΓ es conmensurable con el de ΓB, ΔΘ es también conmensurable con KΛ; de modo que la (recta) ΔK es también conmensurable con la (recta) KM [VI 1; X 11]. Y puesto que los (cuadrados) de AΓ, ΓB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB [Lema], entonces ΔΛ es también mayor que MZ; de modo que ΔM es también mayor que MH [VI 1]. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por ΔK, KM es igual al (cuadrado) de MN, es decir a la cuarta parte del (cuadrado) de MH, y ΔK es conmensurable con KM. Pero si hay dos rectas desiguales, y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de la menor, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en (partes) conmensurables, el cuadrado de la mayor es mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (la mayor) [X 17]; entonces el cuadrado de ΔM es mayor que el cuadrado de MH en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (ΔM). Ahora bien, ΔM, MH son rectas expresables, y ΔM que es el término mayor es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada ΔE.

Por consiguiente, ΔH es una primera binomial. Q. E. D.

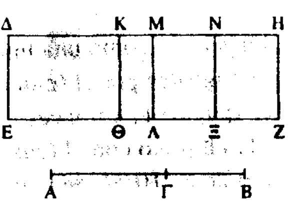
Proposición 61

El cuadrado de una (recta) primera bimedial, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una segunda binomial.

Sea AB la (recta) primera bimedial dividida en sus mediales por el punto Γ, de las cuales AΓ es la mayor; póngase la recta expresable ΔE y aplíquese a ΔE un paralelogramo ΔZ igual al (cuadrado) de AB que produzca la anchura ΔH.

Digo que ΔH es una segunda binomial.

Sígase, pues, la misma construcción de los (teoremas) anteriores, y como AB es una primera bimedial dividida por el punto Γ, entonces AΓ, ΓB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) expresable [X 37]; de modo que los (cuadrados) de AΓ, ΓB son también mediales [X 21]. Luego ΔΛ es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la recta expresable ΔE; luego MΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Puesto que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es a su vez expresable, MZ es también expresable. Y se ha aplicado a la recta expresable MΛ; luego MH es también expresable y conmensurable en longitud con MΛ, es decir con ΔE [X 20]; entonces ΔM es inconmensurable en longitud con MH [X 13]; y son expresables; así pues, ΔM, MH son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΔH es binomial [X 36].



Hay que demostrar ahora que es también segunda.

Pues como los cuadrados de AΓ, ΓB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, entonces ΔΛ es también mayor que MZ; de modo que ΔM es también (mayor) que MH [VI 1]. Y puesto que el (cuadrado) de AΓ es conmensurable con el (cuadrado) de ΓB, ΔΘ es también conmensurable con KΛ; de modo que la (recta) ΔK es también conmensurable con KM [VI 1; X 11]. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por ΔK, KM es igual al (cuadrado) de MN; por tanto, el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (ΔM) [X 17]. Y MH es conmensurable en longitud con ΔE

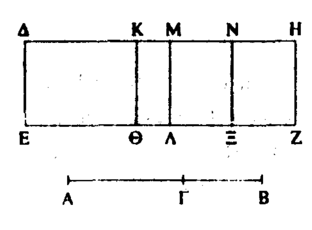
Por consiguiente ΔH es una segunda binomial.

Proposición 62

El cuadrado de una recta segunda bimedial, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una tercera binomial.

Sea AB la (recta) segunda bimedial dividida en sus mediales por el (punto) Γ, de modo que AΓ sea el segmento mayor; y sea ΔE una (recta) expresable, y aplíquese a ΔE el paralelogramo ΔZ igual al cuadrado de AB que produzca como anchura ΔH. Digo que ΔH es una tercera binomial.

Sígase la misma construcción que en las demostraciones anteriores. Y como AB es una segunda bimedial dividida por el (punto) Γ, entonces AΓ, ΓB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) medial [X 38]; de modo que la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y es igual a ΔΛ; luego ΔΛ es también medial. Y se ha aplicado a la recta expresable ΔE; así pues MΔ es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Por lo mismo MH es entonces también expresable e inconmensurable en longitud con MΛ, es decir con ΔE; luego cada una de las (rectas) ΔM, MH es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔE. Ahora bien, puesto que AΓ es inconmensurable en longitud con ΓB, mientras que, como AΓ es a ΓB, así el (cuadrado) de AΓ al (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, entonces, el (cuadrado) de AΓ es también inconmensurable con el (rectángulo) AΓ, ΓB [X 11]. De modo que la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es también inconmensurable con el doble del



(rectángulo) AΓ, ΓB [X 12 y 13], es decir, ΔΛ con MZ; de modo que ΔM es también inconmensurable con MH [VI 1 y X 11]. Y son expresables; por tanto, ΔH es una binomial [X 36].

Hay que demostrar ahora que también es tercera.

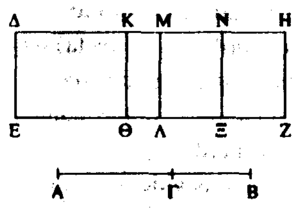
De manera semejante a los (teoremas) anteriores concluiríamos que ΔM es mayor que MH, y ΔK es conmensurable con KM. Y el (rectángulo) ΔK, KM es igual al (cuadrado) de MN; entonces el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella [ΔM]. Y ninguna de las (rectas) ΔM, MH es conmensurable en longitud con ΔE.

Por consiguiente, ΔH es una tercera binomial [X Seg. Def. 3]. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 63

El cuadrado de una recta «mayor» aplicado a una recta expresable produce como anchura una cuarta binomial.

Sea AB una recta «mayor» dividida por el (punto) Γ de modo que AΓ sea mayor que ΓB y (sea) ΔE una (recta) expresable y aplíquese a ΔE el paralelogramo ΔZ igual al cuadrado de AB que produzca como anchura ΔH.



Digo que ΔH es una cuarta binomial.

Sígase la misma construcción que en las demostraciones anteriores. Y como AB es una (recta) «mayor» dividida por el punto Γ, AΓ, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable pero el (rectángulo comprendido) por ellas medial [X 39]. Así pues, como la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB

es expresable, entonces ΔΛ es expresable; luego ΔM es también expresable y conmensurable en longitud con ΔE [X 20]. Puesto que el doble del rectángulo comprendido por ΑΓ, ΓΒ, es decir MZ, es, a su vez, medial y se ha aplicado a la recta expresable MΛ, entonces MH es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]; luego ΔM es también inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]; luego ΔM es también inconmensurable en longitud con MH [X 13]. Así pues, ΔM, MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto ΔH es una (recta) binomial [X 36].

Hay que demostrar que es también cuarta.

De manera semejante a los (teoremas) anteriores demostraríamos que ΔM es mayor que MH, y que el (rectángulo) ΔK, KM es igual al (cuadrado) de MN. Así pues, como el cuadrado de ΑΓ es inconmensurable con el (cuadrado) de ΓΒ, entonces ΔΘ es inconmensurable con KΛ; de modo que ΔK es inconmensurable con KM [VI 1; X 11]. Pero si hay dos rectas desiguales y se aplica a la mayor un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, y la divide en partes inconmensurables, entonces el cuadrado de la mayor será mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una recta inconmensurable en longitud con ella (la mayor) [X 18]; luego el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΔM). Ahora bien, ΔM, MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y ΔM es conmensurable con la (recta) expresable propuesta ΔE.

Por consiguiente, ΔH es una cuarta binomial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 64

El cuadrado del lado de un área expresable más una medial aplicado a una recta expresable produce como anchura una quinta binomial.

Sea AB el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial, dividido en sus rectas por el (punto) Γ, de modo que AΓ sea la mayor, y póngase la recta expresable ΔE, y aplíquese a ΔE el paralelogramo ΔZ igual al (cuadrado) de AB que produzca la anchura ΔH.

Digo que ΔH es una quinta binomial.

Sígase la misma construcción que en los (teoremas) anteriores. Pues bien, como AB, el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial, ha sido dividido por el (punto) Γ, entonces AΓ, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable [X 40]. Así pues, como la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es medial, entonces el (área) ΔΛ es medial; de modo que ΔM es una (recta) expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Puesto que el doble del (rectángulo) AΓ, ΓB, es decir MZ, es a su vez expresable, entonces MH es también una (recta) expresable conmensurable con ΔE [X 20]. Luego ΔM es inconmensurable con MH [X 13]; luego ΔM, MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, por tanto ΔH es una binomial [X 36].

Digo ahora que también es quinta.

Pues de manera semejante demostraríamos que el (rectángu-

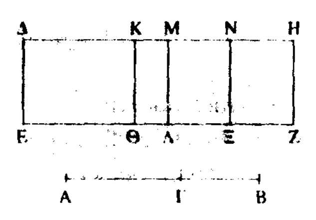
lo) ΔK, KM es igual al (cuadrado) de MN, y que ΔK es inconmensurable en longitud con KM; entonces el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella [X 18]. Y ΔM, MH son conmensurables sólo en cuadrado, y la menor MH es conmensurable en longitud con ΔE.

Por consiguiente, ΔH es una quinta binomial. Q. E. D.

Proposición 65

El cuadrado del lado de la (suma de) dos (áreas) mediales, aplicado a una recta expresable produce como anchura una sexta binomial.

Sea AB el lado del cuadrado equivalente a la (suma de) dos áreas mediales, dividido por el (punto) Γ, y sea ΔE una (recta) expresable, y aplíquese a ΔE el (paralelogramo) ΔZ igual al cuadrado de AB, que produzca la anchura ΔH.



Digo que ΔH es una sexta binomial.

Sígase pues la misma construcción que en los (teoremas) anteriores. Y como AB, el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales, se ha dividido por el (punto) Γ, entonces AΓ, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial, el (rectángulo comprendido) por ellas también medial, y además la suma de sus cuadrados inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ellas [X 41]; de modo que, según las demostraciones anteriores, cada uno de los (rectángulos) ΔΛ, MZ es medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable ΔE; así pues, cada una

de las (rectas) ΔM, MH es expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Ahora bien, puesto que la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, entonces ΔΛ es inconmensurable con MZ. Luego ΔM es inconmensurable con MH [VI 1; X 11]; entonces ΔM, MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, ΔH es una (recta) binomial [X 36].

Digo ahora que también es sexta.

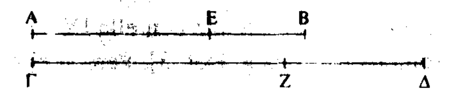
Pues de manera semejante demostraríamos a su vez que el (rectángulo) ΔK, KM es igual al (cuadrado) de MN, y que ΔK es inconmensurable en longitud con KM; y por lo mismo, entonces, el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (ΔM). Ahora bien, ninguna de las (rectas) ΔM, MH es conmensurable en longitud con la recta propuesta ΔE.

Por consiguiente, ΔH es una sexta binomial. Q. E. D.

Proposición 66

Una recta conmensurable en longitud con una binomial es también ella misma binomial y del mismo orden.

Sea AB la recta binomial y sea ΓΔ conmensurable en longitud con AB.



Digo que ΓΔ es binomial y del mismo orden que AB.

Pues como AB es binomial, divídase en sus términos por el (punto) E, y sea AE el término mayor; entonces AE, EB son

(rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 36]. Hágase de forma que como AB es a ΓΔ, así AE a ΓZ [VI 12]; entonces la (recta) restante EB es a la (recta) restante ZΔ, como AB es a ΓΔ [V 19]. Pero AB es conmensurable en longitud con ΓΔ; luego AE es conmensurable también con ΓZ y EB con ZΔ [X 11]. Ahora bien, AE, EB son expresables; luego ΓZ, ZΔ son también expresables. Y como AE es a ΓZ, EB a ZΔ [V 11]. Entonces, por alternancia, como AE es a EB, ΓZ a ZΔ [V 16]. Pero AE, EB son conmensurables sólo en cuadrado; entonces ΓZ, ZΔ son conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Y son expresables; por tanto ΓΔ es una binomial [X 36].

Digo además que es del mismo orden que AB.

Pues el cuadrado de AE es mayor que el de EB o bien en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con (AE) o en el de una inconmensurable con ella. Pues bien, si el cuadrado de AE es mayor que el de EB en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AE), también el cuadrado de ΓZ será mayor que el de ZΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΓZ). Y si AE es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, también ΓZ será conmensurable con ella [X 12], por eso, también, cada una de las (rectas) AB, ΓΔ es primera binomial, es decir, son del mismo orden. Pero si EB es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, ZΔ es también conmensurable con ella [X 12], por eso (ΓΔ) será del mismo orden que AB: porque cada una de ellas será una segunda binomial [X Seg. Def. 2]. Pero si ninguna de las (rectas) AE, EB es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, ninguna de las (rectas) ΓZ, ZΔ será conmensurable con ella [X 13] y cada una será tercera (binomial) [X Seg. Def. 3]. Pero si el cuadrado de AE es mayor que el de EB en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AE), también el cuadrado de ΓZ es mayor que el de ZΔ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓZ) [X 14]. Y si AE es conmensurable con la

(recta) expresable propuesta, ΓZ es también conmensurable con ella; y cada una de ellas es cuarta (binomial) [X Seg. Def. 4]. Pero si (lo es) EB, también (lo es) ZΔ, y cada una de ellas será quinta (binomial) [X Seg. Def. 5]. Y si ninguna de las (rectas) AE, EB es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, tampoco lo es ninguna de las (rectas) ΓZ, ZΔ y cada una de ellas será sexta (binomial) [X Seg. Def. 6].

De modo que una (recta) conmensurable en longitud con una binomial es también ella misma binomial y del mismo orden. Q. E. D.

Proposición 67

La recta conmensurable en longitud con una bimedial es también ella misma bimedial y del mismo orden.

Sea AB una bimedial y sea ΓΔ conmensurable en longitud con ella.

Digo que ΓΔ es bimedial y del mismo orden que AB.

Pues como AB es una bimedial, divídase en sus mediales por el (punto) E; entonces AE, EB son rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado [X 37 y 38]. Hágase de forma que como AB es a ΓΔ, AE a ΓZ; entonces la (recta) restante EB es a la (recta) restante ZΔ, como AB es a ΓΔ [V 19]. Pero AB es conmensurable en longitud con ΓΔ; entonces AE, EB son conmensurables respectivamente con ΓZ, ZΔ [X 11]. Pero AE, EB son mediales; luego ΓZ, ZΔ son también mediales [X 23]. Y dado que, como AE es a EB, ΓZ a ZΔ [V 11], mientras que AE, EB son conmensurables sólo en cuadrado, [entonces] ΓZ, ZΔ son conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Pero se ha demostrado también que son mediales; por tanto ΓΔ es bimedial.

Digo ahora que también es del mismo orden que AB.

Pues dado que, como AE es a EB, ΓZ a ZΔ, entonces, como el (cuadrado) de AE es al (rectángulo) AEB, así el (cuadrado) de ΓZ es al (rectángulo) ΓZΔ; por alternancia, como el (cuadrado) de AE es al (cuadrado) de ΓZ, así el (rectángulo) AEB al (rectángulo) ΓZΔ [V 16]. Y el (cuadrado) de AE es conmensurable con el de ΓZ; luego el (rectángulo) AEB también es conmensurable con el (rectángulo) ΓZΔ. Así pues, si el (rectángulo) AEB es expresable, el (rectángulo) ΓZΔ es también expresable [y por eso ΓΔ es primera bimedial] [X 37]. Pero si es medial, medial [X 23 Por.] y cada una de ellas AB, ΓΔ es segunda [X 38].

Por eso ΓΔ es del mismo orden que AB. Q. E. D.

Proposición 68

Una (recta) conmensurable con una (recta) «mayor» es también «mayor»

Sea AB la recta «mayor», y sea ΓΔ conmensurable con AB. Digo que ΓΔ es «mayor».

Divídase AB por el (punto) E; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable, pero el (rectángulo comprendido) por ellas medial [X 39]; hágase de la misma forma que en los (teoremas) anteriores. Dado que, como AB es a ΓΔ, así AE a ΓZ y EB a ZΔ, entonces, como AE es a ΓZ, así también EB a ZΔ [V 11]. Pero AB es conmensurable con ΓΔ; luego AE, EB son conmensurables respectivamente con ΓZ, ZΔ [V 11].

Ahora bien, dado que, como AE es a ΓZ, así EB a ZΔ, y por alternancia, como AE es a EB, así ΓZ a ZΔ [V 16], entonces, por composición, como AB es a BE, así ΓΔ a ΔZ [V 18];

luego como el (cuadrado) de AB es al (cuadrado) de BE, así el (cuadrado) de ΓΔ al (cuadrado) de ΔZ [VI 20]. De manera semejante demostraríamos que como el (cuadrado) de AB es al (cuadrado) de AE, así el (cuadrado) de ΓΔ al (cuadrado) de ΓZ. Entonces, como el (cuadrado) de AB es a los (cuadrados) de AE, EB, así el (cuadrado) de ΓΔ a los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ. Luego, por alternancia, como el (cuadrado) de AB es al (cuadrado) de ΓΔ, así los (cuadrados) de AE, EB a los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ [V 16]. Pero el (cuadrado) de AB es conmensurable con el cuadrado de ΓΔ; entonces los (cuadrados) de AE, EB son también conmensurables con los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ. Y los cuadrados de AE, EB juntos son expresables, (entonces) los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ juntos son también expresables. Pero, de manera semejante, el doble del (rectángulo comprendido) por AE, EB es también conmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ. Y el doble del (rectángulo comprendido) por AE, EB es medial; entonces, el doble del (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ es medial [X 23 Por.]. Luego ΓZ, ZΔ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable, pero el doble del (rectángulo comprendido) por ellas medial. Por tanto, la recta entera ΓΔ es la (recta) no expresable llamada «mayor» [X 39].

Por consiguiente, una (recta) conmensurable con una «mayor» es «mayor». Q. E. D.

Proposición 69

Una recta conmensurable con el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial es ella misma también el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial.

Sea AB el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial y sea ΓΔ conmensurable con AB.

Hay que demostrar que ΓΔ es también el lado del cuadrado equivalente a un (área) medial más una expresable.

Divídase AB en sus rectas por el (punto) E; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas expresable [X 40]; sígase la misma construcción que en los (teoremas) anteriores. De manera semejante demostraríamos que ΓZ, ZΔ son inconmensurables en cuadrado y que la suma de los (cuadrados) de AE, EB es conmensurable con la suma de los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ y el (rectángulo comprendido) por AE, EB con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ; de modo que la suma de los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ es medial y el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ expresable.

Por consiguiente, ΓΔ es el lado del cuadrado equivalente a un (área) medial más una expresable. Q. E. D.

Proposición 70

Una (recta) conmensurable con el lado del cuadrado equivalente a la suma dos (áreas) mediales es también ella misma el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales.

Sea AB el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales y sea ΓΔ conmensurable con AB.

Hay que demostrar que ΓΔ es también el lado del cuadrado equivalente a la suma dos (áreas) mediales.

Pues como AB es el lado del cuadrado equivalente a la

suma de dos (áreas) mediales, divídase en sus rectas por E; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus (cuadrados) medial y el (rectángulo comprendido) por ellas también medial y además la suma de los cuadrados de AE, EB inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AE, EB [X 41]; sígase la misma construcción que en los (teoremas) anteriores. De manera semejante demostraríamos que ΓZ, ZΔ son inconmensurables en cuadrado y que la suma de los (cuadrados) de AE, EB es conmensurable con la suma de los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ y el (rectángulo comprendido) por AE, EB con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ; de modo que la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ es medial y el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ es también medial y además la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ.

A E B Γ Z Δ

Por consiguiente, ΓΔ es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales. Q. E. D.

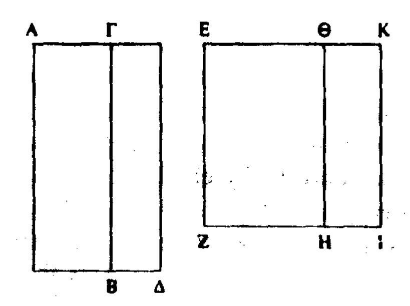
Proposición 71

Si se suman un (área) expresable y una medial resultan cuatro (tipos de rectas) no expresables: o una binomial o una primera bimedial o una «mayor» o el lado del cuadrado equivalente a un (área) medial más una expresable.

Sea AB el (área) expresable y ΓΔ la medial.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AΔ es o binomial o primera bimedial o «mayor» o el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial.

Pues AB o es mayor que ΓΔ o es menor. Sea en primer lugar mayor; y póngase la (recta) expresable EZ, y aplíquese a EZ el

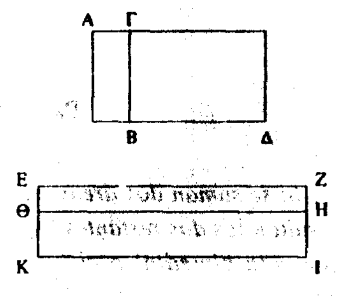


rectángulo EH igual a AB que produzca la anchura EΘ; y aplíquese a EZ el rectángulo ΘI igual a ΔΓ que produzca la anchura ΘK. Y puesto que AB es expresable y es igual a EH, entonces EH es también expresable y se ha aplicado a EZ produciendo la anchura EΘ; luego EΘ es expresable y conmensurable en longitud con EZ [X 20]. Puesto que ΓΔ es, a su vez, medial y es igual a ΘI, entonces ΘI es también medial. Y se ha aplicado a la recta expresable EZ produciendo la anchura ΘK; luego ΘK es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Y como ΓΔ es medial, mientras que AB es expresable, entonces AB es inconmensurable con ΓΔ; de modo que EH es inconmensurable con ΘI. Pero como EH es a ΘI, así EΘ a ΘK [VI 1]; luego EΘ es inconmensurable en longitud con ΘK [X 11]. Y ambas son expresables; entonces EΘ, ΘK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego EK es una (recta) binomial dividida por el (punto) Θ [X 36]. Y puesto que AB es mayor que ΓΔ, mientras que AB es igual a EH, y ΓΔ (es igual) a ΘI, entonces EH es también mayor que ΘI; luego EΘ es también mayor que ΘK. Pues bien, el cuadrado de EΘ es mayor que el de ΘK o bien en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con (EΘ) o bien en el de una (recta) inconmensurable con ella.

En primer lugar, sea mayor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΘE); ahora bien, la mayor, ΘE, es conmensurable con la recta propuesta EZ; entonces EK es una (recta) primera binomial [X Seg. Def. 1]. Y EZ es expresable; pero si un área es comprendida por una (recta) expresable y una primera binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es una binomial [X 54]. Así pues, el lado del cuadrado equivalente a EI es binomial; de modo que el lado del cuadrado equivalente a AΔ es también binomial.

Pero ahora sea el cuadrado de EΘ mayor que el de ΘK en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (EΘ). Ahora bien, la mayor EΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta EZ; entonces EK es una cuarta binomial [X Seg. Def. 4]. Pero EZ es expresable; y si un área está comprendida por una (recta) expresable y una cuarta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la recta no expresable llamada «mayor» [X 57]. Así pues el lado del cuadrado equivalente al área EI es una recta «mayor»; de modo que también el lado del cuadrado equivalente a AΔ es «mayor».

Pero sea ahora AB menor que ΓΔ; entonces EH es menor que ΘI; de modo que EΘ es también menor que ΘK. Pero el cuadrado de ΘK es mayor que el de EΘ o bien en el cuadrado de una (recta) conmensurable con (ΘK) o bien en el de una inconmensurable con ella. En primer lugar sea mayor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella; ahora bien, la menor, EΘ, es conmensurable en longitud con la recta propuesta EZ; entonces EK es una segunda binomial [X Seg. Def. 2]. Pero EZ es expresable; y si un área está



comprendida por una (recta) expresable y una segunda binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es una primera bimedial [X 55]; así pues, el lado del cuadrado equivalente al área EI es una primera bimedial, de modo que el lado del cuadrado equivalente al área AΔ es también una primera bimedial.

Pero ahora sea el cuadrado de ΘK mayor que el de ΘE en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΘK). Ahora bien, la recta menor EΘ es conmensurable con la (recta) expresable propuesta EZ; entonces EK es una quinta binomial [X Seg. Def. 5]. Pero EZ es expresable; y si un área está comprendida por una (recta) expresable y una quinta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial [X 58]. Por tanto, el lado del cuadrado equivalente al área EI es el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial; de modo que el lado del cuadrado equivalente a AΔ es el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial.

Por consiguiente, si se suman un área expresable y una medial, se producen cuatro (tipos de) rectas no expresables: o una binomial o una primera bimedial o una «mayor» o el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial. Q. E. D.

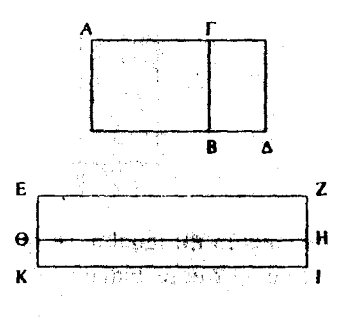
Proposición 72

Si se suman dos áreas mediales inconmensurables entre sí, resultan los dos restantes (tipos de) rectas no expresables: o la segunda bimedial o el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales.

Súmense pues las dos (áreas) mediales inconmensurables entre sí AB, ΓΔ.

Digo que el lado del cuadrado igual a AΔ o es una segunda bimedial o es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Pues AB o es mayor o es menor que ΓΔ. Sea AB, si se da el caso, en primer lugar, mayor que ΓΔ; y póngase la recta expresable EZ, y aplíquese a EZ el rectángulo EH igual a AB que produzca la anchura EΘ, y el (rectángulo) ΘI igual a ΓΔ que produzca la anchura ΘK. Y puesto que cada una de las (áreas) AB, ΓΔ es medial, entonces cada una de las (áreas) EH, ΘI es también medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable ZE produciendo las anchuras EΘ, ΘK; así pues, cada una de las (rectas) EΘ, ΘK es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Y puesto que AB es inconmensurable con ΓΔ, y AB es igual a EH, y ΓΔ a ΘI, entonces EH es también inconmensurable con ΘI. Pero como EH es a ΘI, así EΘ es a ΘK [VI 1]; entonces EΘ es inconmensurable en longitud con ΘK [X 11]. Así pues EΘ, ΘK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego EK es binomial [X 36]. Pero el cuadrado de EΘ es mayor que el de ΘK o bien en el cuadrado de una (recta) conmensurable con (ΘK) o bien en el de una inconmensurable con ella.



Sea mayor el cuadrado (de ΘK), en primer lugar, en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con ella (ΘK). Ahora bien, ninguna de las (rectas) EΘ, ΘK es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta EZ; entonces EK es una tercera binomial [X Seg. Def. 3]. Pero EZ es expresable; y si un área está comprendida por una (recta) expresable y una tercera binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es

una segunda bimedial [X 56]; luego el lado de EI, es decir de AΔ es una segunda bimedial.

Pero ahora sea el cuadrado de EΘ mayor que el de ΘK en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (EΘ); ahora bien, cada una de las (rectas) EΘ, ΘK es inconmensurable en longitud con EZ; luego EK es una sexta binomial [X Seg. Def. 6]. Pero si un área está comprendida por una (recta) expresable y una sexta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales [X 59]; de modo que el lado del cuadrado equivalente al área AΔ es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales.

Por consiguiente, si se suman dos áreas mediales inconmensurables entre sí, resultan los dos restantes (tipos de) rectas no expresables: o la segunda bimedial o el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Las (rectas) binomiales y las no expresables siguientes no son las mismas que una medial y difieren entre sí. Pues el cuadrado de una medial aplicado a una recta expresable produce como anchura una recta expresable e inconmensurable en longitud con aquella a la que se ha aplicado [X 22]. Mientras que el (cuadrado) de la binomial aplicado a una recta expresable produce como anchura la primera binomial [X 60]. Y el cuadrado de la primera binomial aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la segunda binomial [X 61]. Pero el cuadrado de una segunda bimedial aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la tercera binomial [X 62]. Y el cuadrado de una «mayor» aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la cuarta binomial [X 63]. Mientras que el cuadrado del lado equivalente a un área expresable más una medial aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la quinta binomial [X 64]. Pero

el cuadrado del lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la sexta binomial [X 65]. Dichas anchuras son diferentes de la primera y entre sí; de la primera porque es expresable, y entre sí porque no son del mismo orden. De modo que las propias (rectas) no expresables también son diferentes entre sí.

Proposición 73

Si se quita de una (recta) expresable otra recta expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera, la (recta) restante no es expresable; llámese apótoma.

Quítese, pues, de la (recta) expresable AB, la recta expresable BΓ que es conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera.

Digo que la (recta) restante AΓ es la recta no expresable llamada apótoma.

Pues como AB es inconmensurable en longitud con BΓ, y como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de AB al (rectángulo comprendido) por AB, BΓ, entonces, el (cuadrado) de AB es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 11]. Pero los (cuadrados) de AB, BΓ son conmensurables con el (cuadrado) de AB [X 15], y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 6]. Y puesto que los (cuadrados) de AB, BΓ son iguales al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ junto con el cuadrado de ΓA [II 7], entonces los cuadrados de AB, BΓ son inconmensurables también con el resto, el cuadrado de AΓ [X 13, 16]. Pero los cua-

drados de AB, BΓ son expresables; por tanto, AΓ no es expresable; llámesela apótoma. Q. E. D.[38].

Proposición 74

Si de una (recta) medial se quita otra medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la recta (entera) y que comprenda junto con la recta entera un (rectángulo) expresable, la (recta) restante no es expresable; llámesela primera apótoma de una medial.

Quítese, pues, de la (recta) medial AB la (recta) medial BΓ que es conmensurable sólo en cuadrado con AB y produce junto con AB el (rectángulo) expresable (comprendido) por AB, BΓ.

B

Γ

A

Digo que la (recta) restante AΓ no es expresable; llámese primera apótoma de una medial.

Pues como AB, BΓ son mediales, los cuadrados de AB, BΓ son también mediales. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable; entonces los cuadrados de AB, BΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; luego el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es inconmensurable con el resto, el cuadrado de AΓ [II 7]; puesto que, si una magnitud total es inconmensurable con una de

---

[38] Euclides continúa ahora, dentro de la clasificación general, con aquellas rectas que son producidas por la diferencia de dos rectas expresables inconmensurables.

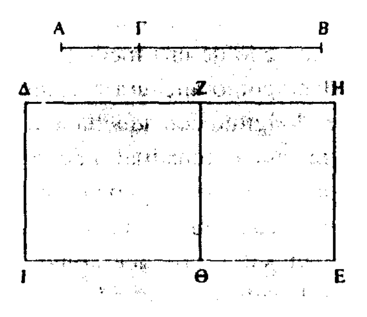
Taisbak relaciona el nombre de «apótoma» con el lado del decágono regular, que resulta de la diferencia de los mismos lados de cuadrados que, sumados, producen el diámetro del círculo. Cf. nota 28.

las (magnitudes parciales), también las magnitudes iniciales serán inconmensurables [X 16]. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable; luego el cuadrado de AΓ no es expresable; por consiguiente AΓ no es expresable; llámesela primera apótoma de una medial.

Proposición 75

Si de una (recta) medial se quita otra medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y que comprenda con la recta entera un rectángulo medial, la recta restante no es expresable; llámesela segunda apótoma de una medial.

Quítese, pues, de la (recta) medial AB, la (recta) ΓB que es conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera AB y comprende con la (recta) entera AB el (rectángulo) medial AB, BΓ [X 28].



Digo que la (recta) restante AΓ no es expresable; llámesela segunda apótoma de una medial.

Póngase, pues, la recta expresable ΔI y aplíquese a ΔI un (paralelogramo) ΔE igual a los (cuadrados) de AB, BΓ que produzca la anchura ΔH y aplíquese a ΓI el (paralelogramo) ΔΘ igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ que produzca la anchura ΔZ; entonces el resto ZE es igual al (cuadrado) de AΓ [II 7]: ahora bien, puesto que los (cuadrados) de AB, BΓ son mediales y conmensurables, entonces ΔE es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha apli-

cado a la recta expresable ΔI produciendo la anchura ΔH. Por tanto ΔH es expresable e inconmensurable en longitud con ΔI [X 22]. Puesto que el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es, a su vez, medial, entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es también medial [X 23 Por.]. Y es igual a ΔΘ; luego ΔΘ es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔI produciendo la anchura ΔZ; así pues, ΔZ es expresable e inconmensurable en longitud con ΔI [X 22]. Y puesto que AB es conmensurable sólo en cuadrado con BΓ, entonces AB es inconmensurable en longitud con BΓ; luego el cuadrado de AB es también inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 11]. Pero los (cuadrados) de AB, BΓ son conmensurables con el (cuadrado) de AB [X 15], y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 6]; entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es inconmensurable con los (cuadrados) de AB, BΓ [X 13]. Pero ΔE es igual a los (cuadrados) de AB, BΓ, mientras que ΔΘ es (igual) al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; entonces ΔE es inconmensurable con ΔΘ. Pero como ΔE es a ΔΘ, así HΔ a ΔZ [VI 1]; así pues HΔ es inconmensurable con ΔZ [X 11]. Y ambas son expresables; entonces HΔ, ΔZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ZH es apótoma [X 73]. Pero ΔI es expresable; y el (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una no expresable no es expresable [Deducción a partir de X 20], y el lado del cuadrado equivalente no es expresable. Ahora bien, AΓ es el lado del cuadrado equivalente a ZE; por consiguiente, AΓ no es expresable; llámesela segunda apótoma de una medial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 76

Si de una recta se quita otra recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y haga con la (recta) entera la suma de sus cuadrados expresable y el (rectángulo comprendido) por ellas medial, la recta restante no es expresable; llámesela «menor».

Quítese de la recta AB la recta BΓ que es inconmensurable en cuadrado con la recta entera y cumple las (condiciones) antedichas [X 33].

Digo que la (recta) restante AΓ es la (recta) no expresable llamada «menor».

Pues como la suma de los cuadrados de AB, BΓ es expresable, y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ medial, entonces los (cuadrados) de AB, BΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; y por conversión los (cuadrados) de AB, BΓ son inconmensurables con el resto, el cuadrado de AΓ [II 7 y X 16]. Pero los (cuadrados) de AB, BΓ son expresables, luego el (cuadrado) de AΓ no es expresable; por consiguiente, AΓ no es expresable; llámesela «menor». Q. E. D.

A Γ B

PROPOSICIÓN 77

Si de una recta se quita otra recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera, y que haga, con la recta entera, la suma de sus cuadrados medial, pero el doble del (rectángulo comprendido) por ellas expresable, la recta res-

tante no es expresable; llámesela la que hace con un área expresable un área entera medial.

Quítese, pues, de la recta AB la recta BΓ que es inconmensurable en cuadrado con AB y cumple las (condiciones) antedichas [X 34].

Digo que la (recta) restante AΓ es la mencionada recta no expresable.

Pues como la suma de los cuadrados de AB, BΓ es medial, y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ expresable, entonces los (cuadrados) de AB, BΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; luego el resto, el (cuadrado) de AΓ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [II 7 y X 16]. Ahora bien, el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable; así pues el cuadrado de AΓ no es expresable; por consiguiente AΓ no es expresable; llámesela la que hace con un área expresable un área entera medial. Q. E. D.

A
Γ
B

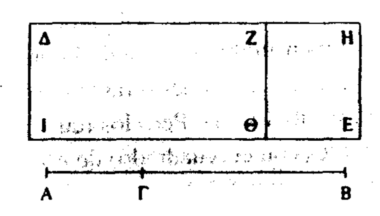
Proposición 78

Si de una recta se quita otra recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y que haga junto con la (recta) entera la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas medial y además sus cuadrados inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ellas, entonces la recta restante no es expresable; llámesela la que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Quítese, pues, de la recta AB la (recta) BΓ que sea inconmensurable en cuadrado con AB y que cumpla las condiciones antedichas [X 35].

Digo que la (recta) restante AΓ es la (recta) no expresable llamada la que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Póngase, pues, la (recta) expresable ΔI y aplíquese a ΔI el (rectángulo) ΔE igual a los (cuadrados) de AB, BΓ que produzca la anchura ΔH, y quítese ΔΘ igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ. Entonces el (rectángulo) restante ZE es igual al (cuadrado) de AΓ [II 7]; de modo que AΓ es el lado del cuadrado equivalente a ZE. Ahora bien, puesto que la suma de los cuadrados de AB, BΓ es medial y es igual a ΔE, entonces ΔE es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔI produciendo la anchura ΔH; luego ΔH es expresable e inconmensurable en longitud con ΔI [X 22]. Puesto que el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es, a su vez, medial y es igual a ΔΘ, entonces ΔΘ es medial; y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔI produciendo la anchura ΔZ; luego ΔZ es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔI [X 22]. Y como los cuadrados de AB, BΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ, entonces ΔE es también inconmensurable con ΔΘ. Pero como ΔE es a ΔΘ, así ΔH a ΔZ [VI 1]; luego ΔH es inconmensurable con ΔZ [X 11]. Y ambas son expresables, entonces HΔ, ΔZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Luego ZH es apótoma [X 73]. Y ZΘ es expresable. Pero el rectángulo comprendido por una (recta) expresable y una apótoma no es expresable [Deducción de X 20] y el lado del cuadrado equi-



valente a él no es expresable; ahora bien, AΓ es el lado del cuadrado equivalente a ZE; por consiguiente, AΓ no es expresable; llámesela la que hace con un (área) medial un (área) entera medial. Q. E. D.

Proposición 79

A una apótoma únicamente se le adjunta una (recta) expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera.

Sea AB la apótoma y BΓ la adjunta a ella; entonces AΓ, ΓB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73].

Digo que no se adjunta a AB ninguna otra (recta) expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera.

Pues, si es posible, adjúntese BΔ; entonces AΔ, ΔB son también (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y como aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AΔ, ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB en eso exceden también los (cuadrados) de AΓ, ΓB al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, porque ambos exceden en lo mismo al (cuadrado) de AB [II 7]; entonces, por alternancia, aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AΔ, ΔB a los (cuadrados) de AΓ, ΓB, en eso excede el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB. Pero los (cuadrados) de AΔ, ΔB exceden a los (cuadrados) de AΓ, ΓB en un (área) expresable, porque ambos son expresables. Así pues, el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB excede al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB en un

(área) expresable; lo cual es imposible, porque ambas son áreas mediales [X 21], y un (área) medial no excede a un (área) medial en un (área) expresable [X 26]. Por tanto, no se adjunta a AB otra (recta) expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera.

Por consiguiente, a una apótoma únicamente se le adjunta una (recta) expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera. Q. E. D.

Proposición 80

A una primera apótoma de una medial se le adjunta únicamente una (recta) medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y que comprenda junto con la (recta) entera un (rectángulo) expresable.

Sea, pues, AB la primera apótoma de una medial y adjúntese a AB la (recta) BΓ; entonces AΓ, ΓB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden el rectángulo expresable AΓ, ΓB [X 74].

A
B
Γ
Δ

Digo que no se añade a AB ninguna otra recta medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y que comprenda junto con la (recta) entera un (rectángulo) expresable.

Pues, si es posible, adáptese también ΔB; entonces AΔ, ΔB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden el (rectángulo) expresable AΔ, ΔB [X 74]. Y como aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AΔ, ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB, en eso exceden también los (cuadrados) de AΓ, ΓB al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, porque exceden en lo mismo, en el (cuadrado) de AB [II 7]; en

por alternancia, aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AΔ, ΔB a los (cuadrados) de AΓ, ΓB, en eso excede también el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB excede al doble del (rectángulo comprendido por AΓ, ΓB en un área expresable, porque ambos son expresables; así pues, los (cuadrados) de AΔ, ΔB exceden a los (cuadrados) de AΓ, ΓB en un (área) expresable; lo cual es imposible, porque ambos son mediales y un área medial no excede a un (área) medial en un (área) expresable [X 26].

Por consiguiente, a la primera apótoma de una medial se le adjunta únicamente una recta medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y comprenda con la (recta) entera un (rectángulo) expresable. Q. E. D.

Proposición 81

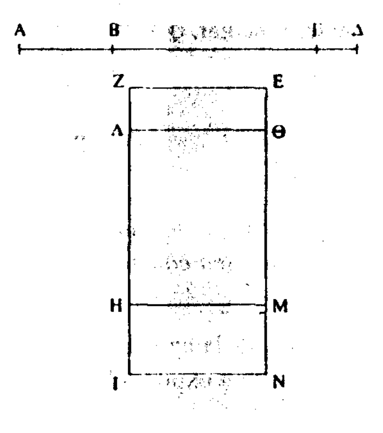
A la segunda apótoma de una medial de le adjunta únicamente una (recta) medial conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera que comprenda con la (recta) entera un (rectángulo) medial.

Sea AB la segunda apótoma de una medial y BΓ la adjunta a AB; entonces AΓ, ΓB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden el (rectángulo) medial AΓ, ΓB [X 75].

Digo que no se adjuntará a AB ninguna otra (recta) medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y comprenda con la (recta) entera un (rectángulo) medial.

Pues, si es posible, adjúntese BΔ; entonces AΔ, ΔB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que com-

prenden el (rectángulo) medial AΔ, ΔB [X 75]; póngase la (recta) expresable EZ, y aplíquese a EZ el (rectángulo) EH igual a los (cuadrados) de AΓ, ΓB que produzca la anchura EM; y quítese el (rectángulo) ΘH igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB que produzca la anchura ΘM; entonces el resto EΛ es igual al cuadrado de AB [II 7]; de modo que AB es el lado del cuadrado equivalente a EΛ. Pues aplíquese, a su vez, a EZ el (área) EI igual a los (cuadrados) de AΔ, ΔB que produzca la anchura EN; pero EΛ es también igual al (cuadrado) de AB; entonces el (área) restante ΘI es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB [II 7]. Ahora bien, dado que AΓ, ΓB son mediales, entonces los (cuadrados) de AΓ, ΓB son también mediales: y son iguales a EH; así pues, EH es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura EM; luego EM es una (recta) expresable inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Puesto que el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es, a su vez, medial, el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es también medial [X 23 Por.]. Y es igual a ΘH; entonces ΘH es también medial. Ahora bien, se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura ΘM; luego ΘM es también expresable inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Y como AΓ, ΓB son conmensurables sólo en cuadrado, entonces AΓ es inconmensurable en longitud con ΓB. Pero, como AΓ es a ΓB, así el (cuadrado) de AΓ al (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB; en-



tonces el (cuadrado) de ΑΓ es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ [X 11]. Ahora bien, los (cuadrados) de ΑΓ, ΓΒ son conmensurables con el cuadrado de ΑΓ, mientras que el (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ es conmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ [X 6]; luego los (cuadrados de ΑΓ, ΓΒ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ [X 13]. Y ΕΗ es igual a los cuadrados de ΑΓ, ΓΒ, mientras que ΗΔ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ; así pues, ΕΗ es inconmensurable con ΘΗ. Pero como ΕΗ es a ΘΗ, así ΕΜ a ΘΜ [VI 1]; entonces ΕΜ es inconmensurable en longitud con ΜΘ [X 11]: y ambas son expresables; luego ΕΜ, ΜΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, ΕΘ es una apótoma y ΘΜ la adjunta a ella [X 73]. De manera semejante demostraríamos ahora que ΘΝ también es adjunta a ella; entonces, se adjuntan a una apótoma dos rectas distintas que son conmensurables sólo en cuadrado con la (recta) entera; lo cual es imposible [X 79].

Por consiguiente, a la segunda apótoma de una medial se le adjunta únicamente una recta medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y que comprenda con la recta entera un rectángulo medial. Q. E. D.

Proposición 82

A una (recta) «menor» se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable en cuadrado con la recta entera y que haga junto con la recta entera la suma de sus cuadrados expresable y el doble del rectángulo comprendido por ellas medial.

Sea AB la (recta) «menor», y sea BΓ la adjunta a AB; entonces AΓ, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable y el rectángulo comprendido por ellas medial [X 76].

Digo que no se adjuntará otra recta a AB que cumpla las mismas condiciones.

Pues, si es posible, adjúntese BΔ; entonces AΔ, ΔB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que cumplen las condiciones antedichas [X 76]. Ahora bien, como aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AΔ, ΔB a los (cuadrados) de AΓ, ΓB, en eso excede también el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB y los (cuadrados) de AΔ, ΔB exceden a los cuadrados de AΓ, ΓB en un (área) expresable, porque ambos son expresables, entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB excede al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB en un (área) expresable; lo cual es imposible, porque ambos son mediales [X 26].

Por consiguiente, a una recta «menor» se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable con la (recta) entera y que haga con la (recta) entera la suma de sus cuadrados expresable y el doble del rectángulo comprendido por ellas medial. Q. E. D.

Proposición 83

A una recta que hace con un (área) expresable un (área) entera medial se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y que haga,

duzca la anchura EN. Pero el (cuadrado) de AB es también igual a EΛ; entonces el resto, el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB [II 7] es igual a ΘI. Ahora bien, como la suma de los cuadrados de AΓ, ΓB es medial y es igual a EH, entonces EH es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura EM; luego EM es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Puesto que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es, a su vez, medial y es igual a ΘH, entonces ΘH es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura ΘM; luego ΘM es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Y como los (cuadrados) de AΓ, ΓB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, EH es también inconmensurable con ΘH; entonces EM es inconmensurable en longitud con MΘ [VI 1 y X 11]. Y ambos son expresables; luego EM, MΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, EΘ es apótoma y ΘM la adjunta a ella [X 73]. De manera semejante demostraríamos, a su vez, que EΘ es apótoma y ΘN la adjunta a ella. Entonces se adjuntan a una apótoma dos (rectas) expresables diferentes que son conmensurables sólo en cuadrado con la (recta) entera; lo que se ha demostrado imposible [X 79]. Por tanto, ninguna otra recta se adjuntará a AB.

Por consiguiente, a la recta AB se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y que haga, con la recta entera, la suma de sus cuadrados medial, el doble del (rectángulo comprendido) por ellas, medial y además la suma de sus cuadrados inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por ellas. Q. E. D.

TERCERAS DEFINICIONES

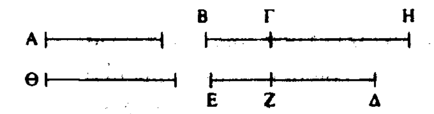
1. Dada una (recta) expresable y una apótoma, si el cuadrado de la (recta) entera es mayor que el de la (recta) adjunta en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (la recta entera), y la (recta) entera es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, llámese (la apótoma) *primera apótoma*.
2. Y si la recta adjunta es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, y el cuadrado de la recta entera es mayor que el de la adjunta en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella, llámese (la apótoma) *segunda apótoma*.
3. Y si ninguna de las dos es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, y el cuadrado de la (recta) entera es mayor que el de la adjunta en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella, llámese (la apótoma) *tercera apótoma*.
4. Si, a su vez, el cuadrado de la recta entera es mayor que el de la adjunta en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (la recta entera), entonces, si la (recta) entera es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, llámese (la apótoma) *cuarta apótoma*.
5. Pero si la adjunta (es conmensurable), *quinta*.
6. Y si ninguna de las dos (es conmensurable), *sexta*.

Proposición 85

Hallar la primera apótoma.

Póngase la (recta) expresable A, y sea BH una (recta) con-

mensurable en longitud con ella; entonces BH es también expresable. Pónganse dos números cuadrados ΔE, EZ, cuya dife-



rencia, ZΔ, no sea un número cuadrado; entonces EΔ tampoco guarda con ΔZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Y hágase (de forma que) como EΔ es a ΔZ, así el cuadrado de BH al cuadrado de HΓ [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de BH es conmensurable con el de HΓ [X 6]. Pero el (cuadrado) de BH es expresable; así pues, el cuadrado de HΓ también es expresable; luego HΓ es expresable. Y como EΔ no guarda con ΔZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de BH tampoco guarda con el (cuadrado) de HΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Luego BH es inconmensurable en longitud con HΓ. Y ambas son expresables; entonces BH, HΓ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto BΓ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que es también primera.

Pues sea el (cuadrado) de Θ aquello en lo que el (cuadrado) de BH es mayor que el (cuadrado) de HΓ. Y dado que, como EΔ es a ZΔ, así el (cuadrado) de BH al (cuadrado) de HΓ, entonces, por conversión [V 11 Por.], como ΔE es a EZ, así el (cuadrado) de HB al (cuadrado) de Θ. Pero ΔE guarda con EZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pues cada uno de ellos es cuadrado; entonces el (cuadrado) de HB guarda con el de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es conmensurable en longitud con Θ [X 9]. Ahora bien, el cuadrado de BH es mayor que

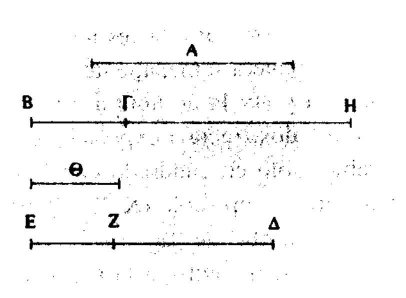
el de HΓ en el cuadrado de Θ; entonces el cuadrado de BH es mayor que el de HΓ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (BH). Y la (recta) entera BH es conmensurable en longitud con la recta propuesta A. Luego BΓ es una primera apótoma [X Ter. Def. 1].

Por consiguiente, se ha hallado la primera apótoma BΓ. Que es lo que había que hallar.

Proposición 86

Hallar la segunda apótoma.

Póngase la (recta) expresable A y la (recta) HΓ conmensurable en longitud con A. Entonces HΓ es expresable. Y pónganse dos números cuadrados ΔE, EZ cuya diferencia, ΔZ, no sea un (número) cuadrado. Y hágase de modo que, como ZΔ es a ΔE, así el cuadrado de ΓH al cuadrado de HB [X 6 Por.]. Entonces el cuadrado de ΓH es conmensurable con el cuadrado de HB [X 6]. Pero el cuadrado de ΓH es expresable. Luego el cuadrado de HB es también expresable; por tanto BH es expresable. Y como el (cuadrado) de HΓ no guarda con el (cuadrado) de HB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ΓH es inconmensurable en longitud con HB [X 9]. Y ambas son expresables; entonces ΓH, HB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego BΓ es apótoma [X 73].



Digo ahora que también es segunda.

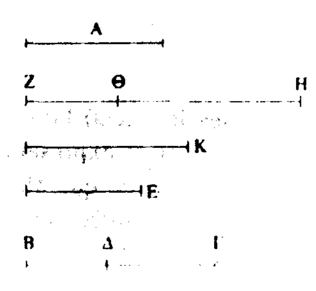
Pues sea el (cuadrado) de Θ aquello en lo que el (cuadrado) de ΒΗ es mayor que el de ΗΓ. Así pues, dado que, como el (cuadrado) de ΒΗ es al (cuadrado) de ΗΓ, así el número ΕΔ es al número ΔΖ, entonces, por conversión, como el (cuadrado) de ΒΗ es al (cuadrado) de Θ, así ΔΕ a ΕΖ [V 19 Por.]. Y cada uno de los (números) ΔΕ, ΕΖ es cuadrado; entonces el cuadrado de ΒΗ guarda con el de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego ΒΗ es conmensurable en longitud con Θ [X 9]. Y el cuadrado de ΒΗ es mayor que el de ΗΓ en el (cuadrado) de Θ; así pues, el cuadrado de ΒΗ es mayor que el de ΗΓ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (ΒΗ). Y la (recta) adjunta ΓΗ es conmensurable con la (recta) expresable propuesta Α. Por tanto, ΒΓ es una segunda apótoma [X Ter. Def. 2].

Por consiguiente, se ha hallado la segunda apótoma ΒΓ. Q. E. D.

Proposición 87

Hallar la tercera apótoma.

Póngase la (recta) expresable Α, y pónganse tres números Ε, ΒΓ, ΓΔ que no guarden entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pero guarde ΓΒ con ΒΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, y hágase de forma que, como Ε es a ΒΓ, así el cuadrado de Α al cuadrado de ΖΗ, y como ΒΓ es a ΓΔ, así el cuadrado de ΖΗ al (cuadrado) de ΗΘ [X 6 Por.].



Así pues, dado que, como E es a BΓ, así el cuadrado de A al cuadrado de ZH, entonces el cuadrado de A es conmensurable con el cuadrado de ZH [X 6]. Y el cuadrado de A es expresable. Luego el cuadrado de ZH es también expresable; por tanto, ZH es expresable. Y como E no guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el cuadrado de A tampoco guarda con el de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. A su vez, dado que, como BΓ es a ΓΔ, así el cuadrado de ZH al de HΘ, entonces el (cuadrado) de ZH es conmensurable con el (cuadrado) de HΘ [X 6]. Pero el (cuadrado) de HΘ es expresable; luego el cuadrado de HΘ es también expresable; por tanto, HΘ es expresable. Ahora bien, puesto que BΓ no guarda con ΓΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego ZH es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]; y ambas son expresables; así pues ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto, ZΘ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que también es tercera.

Pues dado que, como E es a BΓ, así el cuadrado de A al de ZH, mientras que como BΓ es a ΓΔ, así el (cuadrado) de ZH al de ΘH, entonces, por igualdad, como E es a ΓΔ, así el cuadrado de A al de ΘH [V 22]. Pero E no guarda con ΓΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de A tampoco guarda con el de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego A es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]. Por tanto, ninguna de las (rectas) ZH, HΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A. Pues bien, sea el (cuadrado) de K aquello en lo que el (cuadrado) de ZH es mayor que el de HΘ.

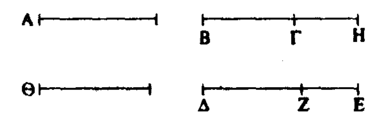
Así pues, dado que, como BΓ es a ΓΔ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces, por conversión, como BΓ es a BΔ, así el cuadrado de ZH al de K [V 19 Por.]. Pero BΓ guarda con BΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de ZH guarda con el de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego ZH es conmensurable en longitud con K [X 9], y el cuadrado de ZH es mayor que el de HΘ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZH). Y además ninguna de las (rectas) ZH, HΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta A; por tanto, ZΘ es una tercera apótoma.

Por consiguiente, se ha hallado la tercera apótoma ZΘ. Q. E. D.

Proposición 88

Hallar la cuarta apótoma.

Póngase la recta expresable A y la (recta) BH conmensurable en longitud con A; entonces BH es expresable. Y pónganse



los dos números ΔZ, ZE, de modo que el total ΔE no guarde con cada uno de los números ΔZ, EZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Y hágase de modo que, como ΔE es a EZ, así el (cuadrado) de BH al (cuadrado) de HΓ [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de BH es conmensurable con el de HΓ [X 6]; pero el (cuadrado) de BH es expresable, luego el (cuadrado) de HΓ es también expresable; por tanto, HΓ es ex-

presable. Ahora bien, como ΔE no guarda con EZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de BH no guarda con el de HΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es inconmensurable en longitud con HΓ [X 9]. Y ambas son expresables; entonces BH, HΓ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto BΓ es apótoma [X 73].

Sea ahora el (cuadrado) de Θ aquello en lo que el (cuadrado) de BH es mayor que el de HΓ. Pues bien, dado que, como ΔE es a EZ, así el (cuadrado) de BH al de HΓ, entonces, por conversión, como EΔ es a ΔZ, así el (cuadrado) de HB al de Θ [V 19 Por.]. Pero EΔ no guarda con ΔZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego el (cuadrado) de HB tampoco guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; por tanto BH es inconmensurable en longitud con Θ [X 9]. Ahora bien, el cuadrado de BH es mayor que el de HΓ en el (cuadrado) de Θ, entonces el (cuadrado) de BH es mayor que el de HΓ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (BH). Y la (recta) entera BH es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A. Por tanto, BΓ es una cuarta apótoma.

Por consiguiente se ha hallado la cuarta apótoma. Q. E. D.

Proposición 89

Hallar la quinta apótoma.

Póngase la (recta) expresable A, y sea la (recta) ΓH conmensurable en longitud con A; entonces ΓH es expresable. Pónganse, a su vez, dos números ΔZ, ZE de modo que ΔE no guarde con ninguno de ellos la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y hágase de forma que

como ZE es a EΔ, así el (cuadrado) de ΓH al de HB. Entonces el (cuadrado) de HB es también expresable [X 6]; luego BH es también expresable; dado que, como ΔE es a EZ, así el (cuadrado) de BH al de HΓ, mientras que ΔE no guarda con EZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de BH tampoco guarda con el de HΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es inconmensurable en longitud con HΓ [X 9]. Y ambas son expresables; entonces BH, HΓ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto BΓ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que es también quinta.

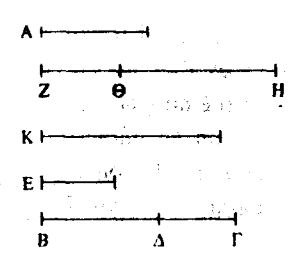
Sea, pues, el (cuadrado) de Θ aquello en lo que el (cuadrado) de BH es mayor que el de HΓ. Así pues, dado que, como el (cuadrado) de BH es al de HΓ, así ΔE a EZ, entonces, por conversión, como EΔ es a ΔZ, así el (cuadrado) de BH al de Θ [V 19 Por.]. Pero EΔ no guarda con ΔZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de BH tampoco guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es inconmensurable en longitud con Θ [X 9]. Y el cuadrado de BH es mayor que el de HΓ en el (cuadrado) de Θ; entonces el cuadrado de HB es mayor que el de HΓ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (HB). Y la (recta) adjunta ΓH es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A. Por tanto BΓ es una quinta apótoma.

Por consiguiente, se ha hallado la quinta apótoma BΓ. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 90

Hallar la sexta apótoma.

Póngase la recta expresable A y tres números E, BΓ, ΓΔ que no guarden entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y además no guarde ΓB con BΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y hágase de forma que como E es a BΓ, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de ZH y como BΓ es a ΓΔ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ [X 6 Por.].



Pues dado que, como E es a BΓ, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de ZH, entonces el (cuadrado) de A es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Pero el (cuadrado) de A es expresable; luego el (cuadrado) de ZH es también expresable; por tanto ZH es también expresable; y como E no guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de A no guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Puesto que, como BΓ es a ΓΔ, así, a su vez, el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces el (cuadrado) de ZH es conmensurable con el (cuadrado) de HΘ [X 6]. Pero el (cuadrado) de ZH es expresable; luego el (cuadrado) de HΘ es también expresable; por tanto, HΘ es expresable. Ahora bien, como BΓ no guarda con ΓΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego ZH es

inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]. Y ambas son expresables; entonces ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, ZΘ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que además es sexta.

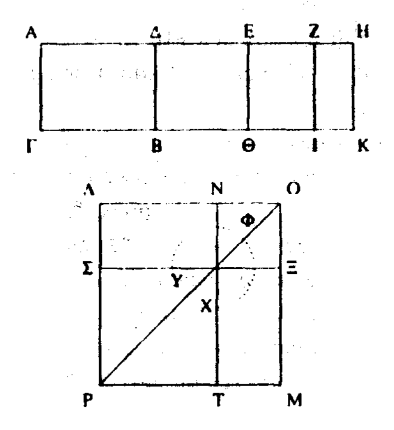
Pues dado que, como E es a BΓ, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de ZH, mientras que, como BΓ es a ΓΔ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces, por igualdad, como E es a ΓΔ, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de HΘ [V 22]. Pero E no guarda con ΓΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el cuadrado de A tampoco guarda con el de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]; por tanto, ninguna de las rectas ZH, HΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable A. Así pues, sea el cuadrado de K aquello en lo que el (cuadrado) de ZH es mayor que el de HΘ. Dado que, como BΓ es a ΓΔ, así el (cuadrado) de ZH al de HΘ, entonces, por conversión, como ΓB es a BΔ, así el cuadrado de ZH al (cuadrado) de K [X 19 Por.]. Pero ΓB no guarda con BΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego el (cuadrado) de ZH no guarda con el (cuadrado) de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Por tanto, ZH es inconmensurable en longitud con K [X 9]. Y el cuadrado de ZH es mayor que el (cuadrado) de HΘ en el (cuadrado) de K; entonces el (cuadrado) de ZH es mayor que el cuadrado de HΘ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZH). Y ninguna de las (rectas) ZH, HΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A. Por tanto, Θ es una sexta apótoma.

Por consiguiente, se ha hallado la sexta apótoma. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 91

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una primera apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una apótoma.

Sea, pues, comprendida el área AB por la (recta) expresable AΓ y la primera apótoma AΔ.



Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es una apótoma.

Pues como AΔ es una primera apótoma, sea ΔH la adjunta a ella; entonces AH, HΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y la (recta) entera AH es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, AΓ, y el cuadrado de AH es mayor que el de HΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (AH) [X Ter. Def. 1]; entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔH, deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) conmensurables [X 17]. Divídase ΔH en dos

inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]. Y ambas son expresables; entonces ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, ZΘ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que además es sexta.

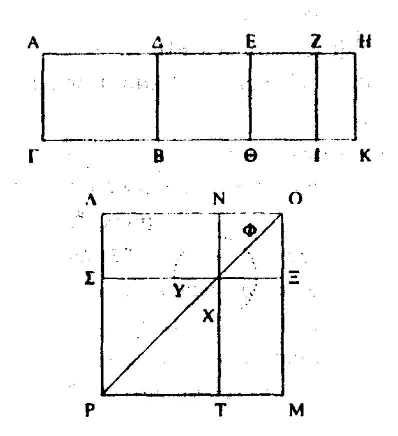
Pues dado que, como E es a BΓ, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de ZH, mientras que, como BΓ es a ΓΔ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces, por igualdad, como E es a ΓΔ, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de HΘ [V 22]. Pero E no guarda con ΓΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el cuadrado de A tampoco guarda con el de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]; por tanto, ninguna de las rectas ZH, HΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable A. Así pues, sea el cuadrado de K aquello en lo que el (cuadrado) de ZH es mayor que el de HΘ. Dado que, como BΓ es a ΓΔ, así el (cuadrado) de ZH al de HΘ, entonces, por conversión, como ΓB es a BΔ, así el cuadrado de ZH al (cuadrado) de K [X 19 Por.]. Pero ΓB no guarda con BΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego el (cuadrado) de ZH no guarda con el (cuadrado) de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Por tanto, ZH es inconmensurable en longitud con K [X 9]. Y el cuadrado de ZH es mayor que el (cuadrado) de HΘ en el (cuadrado) de K; entonces el (cuadrado) de ZH es mayor que el cuadrado de HΘ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZH). Y ninguna de las (rectas) ZH, HΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A. Por tanto, Θ es una sexta apótoma.

Por consiguiente, se ha hallado la sexta apótoma. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 91

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una primera apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una apótoma.

Sea, pues, comprendida el área AB por la (recta) expresable AΓ y la primera apótoma AΔ.



Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es una apótoma.

Pues como AΔ es una primera apótoma, sea ΔH la adjunta a ella; entonces AH, HΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y la (recta) entera AH es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, AΓ, y el cuadrado de AH es mayor que el de HΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (AH) [X Ter. Def. 1]; entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔH, deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) conmensurables [X 17]. Divídase ΔH en dos

partes iguales por el (punto) E, y aplíquese a AH un (paralelogramo) igual al (cuadrado) de EH, deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH; entonces AZ es conmensurable con ZH. Y trácense por los puntos E, Z, H las (rectas) EΘ, ZI, HK paralelas a AΓ. Y puesto que AZ es conmensurable en longitud con ZH, entonces AH también es conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) AZ, ZH [X 15]. Pero AH es conmensurable con AΓ; luego cada una de las (rectas) AZ, ZH es conmensurable en longitud con AΓ [X 12]. Y AΓ es expresable; por tanto, cada una de las (rectas) AZ, ZH es también expresable; de modo que cada uno de los (rectángulos) AI, ZK es también expresable [X 19]. Ahora bien, puesto que ΔE es también conmensurable en longitud con EH, entonces ΔH es también conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) ΔE, EH [X 15]. Pero ΔH es expresable e inconmensurable en longitud con AΓ; así pues cada una de las (rectas) ΔE, EH es también expresable e inconmensurable en longitud con AΓ [X 13]; luego cada uno de los (rectángulos) ΔΘ, EK es medial [X 21].

Ahora, hágase el cuadrado ΛM igual a AI, y quítese un cuadrado NΞ que tenga el ángulo común ΛOM y sea igual a ZK; entonces los cuadrados ΛM, NΞ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea OP su diagonal y constrúyase la figura. Pues bien, como el rectángulo comprendido por AZ, ZH es igual al cuadrado de EH, entonces, como AZ es a EH, así EH a ZH [VI 17]. Pero como AZ es a EH, así AI a EK, mientras que, como EH es a ZH, así el (área) EK al (área) KZ [VI 1]; luego EK es media proporcional de AI, KZ [V 11]: pero MN es también media proporcional de ΛM, NΞ, como se ha probado anteriormente [Lema post. X 53]; y AI es igual al cuadrado de ΛM, y KZ al de NΞ; entonces MN es igual a EK. Pero EK es igual a ΔΘ, y MN a ΛΞ; luego ΔK es igual al gnomon [II Def. 2] YΦX y NΞ: pero AK es también igual a los cuadrados de ΛM, NΞ; así pues, el área res-

tante AB es igual a ΣΤ. Pero ΞΤ es el cuadrado de ΛΝ; luego el (cuadrado) de ΛΝ es igual a AB; por tanto ΛΝ es el lado del cuadrado equivalente a AB.

Digo ahora que ΛΝ es una apótoma.

Pues como cada una de las (áreas) ΑΙ, ΖΚ es expresable, y es igual a ΛΜ, ΝΞ, entonces cada una de las (áreas) ΛΜ, ΝΞ, es decir los cuadrados de cada una de las (rectas) ΛΟ, ΟΝ, es también expresable; luego cada una de las (rectas) ΛΟ, ΟΝ es también expresable. Puesto que ΔΘ es, a su vez, medial y es igual a ΛΞ, entonces ΛΞ es también medial. Pues bien, como ΛΞ es medial y ΝΞ expresable, entonces ΛΞ es inconmensurable con ΝΞ; pero como ΛΞ es a ΝΞ, así ΛΟ a ΟΝ [VI 1]; así pues ΛΟ es inconmensurable en longitud con ΟΝ [X 11]. Ahora bien, ambas son expresables; entonces ΛΟ, ΟΝ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΛΝ es una apótoma [X 73]: y es el lado del cuadrado equivalente al área AB; por tanto el lado del cuadrado equivalente al área AB es una apótoma.

Por consiguiente, si un área está comprendida por una (recta) expresable..., etc.

Proposición 92

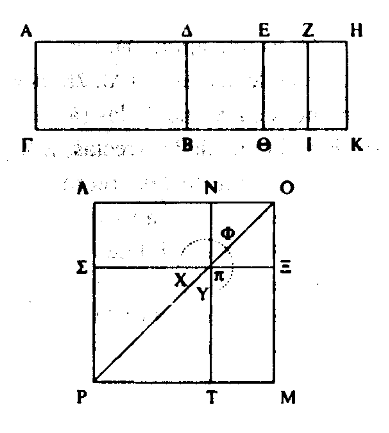
Si un área está comprendida por una recta expresable y una segunda apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una primera apótoma de una medial.

Sea, pues, comprendida el área AB por la (recta) expresable ΑΓ y la segunda apótoma ΑΔ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es una primera apótoma de una medial.

Sea, pues ΔΗ la adjunta a ΑΔ; entonces ΑΗ, ΗΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73], y la ad-

junta, ΔH, es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, AΓ, y el cuadrado de la (recta) entera, AH, es mayor que el



de la adjunta HΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (AH) [X Ter. Def. 2]. Pues bien, como el cuadrado de AH es mayor que el de HΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AH), entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de HΔ, deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en partes conmensurables [X 17]. Pues bien, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E; y aplíquese a AH un (paralelogramo) igual al (cuadrado) de EH deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH; entonces AZ es conmensurable en longitud con ZH. Luego AH también es conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) AZ, ZH [X 15]. Pero AH es expresable e inconmensurable en longitud con AΓ; entonces cada una de las (rectas) AZ, ZH es expresable e inconmensurable en longitud con AΓ [X 13]; luego cada una de las (áreas) AI, ZK es medial [X 21]. Y como ΔE es, a su vez, conmensurable con EH, entonces ΔH es también conmensurable con cada una de las (rectas) ΔE, EH [X

15]. Pero ΔH es conmensurable en longitud con AΓ. Luego cada uno de los (rectángulos) ΔΘ, EK es expresable [X 19].

Pues bien, constrúyase un cuadrado ΛM igual a AI, y quítese NΞ igual a ZK que esté en torno al mismo ángulo que ΛM, a saber ΛOM; entonces los cuadrados ΛM, NΞ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea su diagonal OP y constrúyase la figura. Pues bien, como AI, ZK son mediales y son iguales a los (cuadrados) de ΛO, ON, los cuadrados de ΛO, ON son también mediales; luego ΛO, ON son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado [39]. Y como el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH es igual al (cuadrado) de EH, entonces, como AZ es a EH, así EH a ZH [VI 17]; pero, como AZ es a EH, así AI a EK; mientras que, como EH es a ZH, así EK a ZK [VI 1]; luego EK es media proporcional de AI, ZK [V 11]. Pero MN es también media proporcional de los cuadrados ΛM, NΞ; y AI es igual a ΛM y ZK a NΞ; así pues, MN es igual a EK. Pero ΔΘ es igual a EK, mientras que ΛΞ es igual a MN; por tanto el (área) entera ΛK es igual al gmomon YΦX y NΞ. Pues bien, como el (área) entera AK es igual a ΛM, NΞ, donde ΛK es igual al gnomon YΦX y NΞ, entonces el (área) restante AB es igual a TΣ, pero TΣ es el (cuadrado) de ΛN; luego el (cuadrado) de ΛN es igual al (área) AB; por tanto ΛN es el lado del cuadrado equivalente al área AB.

Digo que ΛN es una primera apótoma de una medial.

Pues como EK es expresable y es igual a ΛΞ, entonces ΛΞ, es decir el (rectángulo comprendido) por ΛO, ON es expresable. Pero se ha demostrado que NΞ es medial; entonces ΛΞ es in-

[39] Hasta las últimas líneas de la proposición no se prueba que ΛO, ON son inconmensurables en longitud. Lo que debía haberse probado en el pasaje anterior es que los cuadrados de ΛO, ON son conmensurables, es decir, que ΛO, ON son «conmensurables en cuadrado» no «sólo en cuadrado» como dice el texto. Teón parece haber reparado en este punto al añadir «y conmensurables entre sí» detrás de «medial», pero esto no soluciona el problema. El manuscrito V presenta la palabra *mónon* «sólo» borrada.

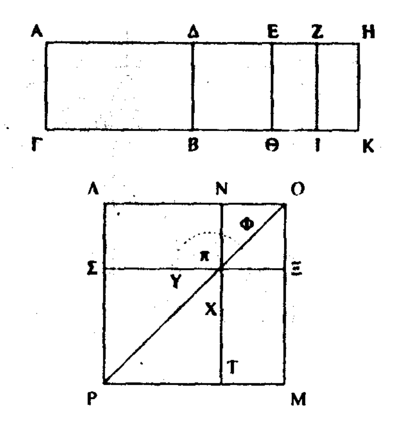
conmensurable con NΞ; pero como ΛΞ es a NΞ, así ΛO a ON [VI 1]; luego ΛO, ON son inconmensurables en longitud [X 11]; así pues, ΛO, ON son mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un rectángulo expresable; por tanto, ΛN es una primera apótoma de una medial; y es el lado del cuadrado equivalente al área AB.

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área AB es una primera apótoma de una medial. Q. E. D.

Proposición 93

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una tercera apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una segunda apótoma de una medial.

Sea, pues, comprendida el área AB por la (recta) expresable AΓ y la tercera apótoma AΔ.



Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es una segunda apótoma de una medial.

Sea, pues, ΔH la adjunta a AΔ; entonces AH, HΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y ninguna de las (rectas) AH, HΔ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta AΓ, y el cuadrado de la (recta) entera AH es mayor que el de la adjunta ΔH en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AH) [X Ter. Def. 3]. Pues bien, como el cuadrado de AH es mayor que el de HΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AH), entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔH, deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en partes conmensurables [X 17]. Así pues, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E, y aplíquese a AH un (paralelogramo) igual al (cuadrado) de EH deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH. Y trácense por los (puntos) E, Z, H las (rectas) EΘ, ZI, HK paralelas a AΓ; entonces AZ, ZH son conmensurables; luego AI es también conmensurable con ZK [VI 1 y X 11]. Y como AZ, ZH son conmensurables en longitud, entonces AH es también conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) AZ, ZH [X 15]. Pero AH es expresable e inconmensurable en longitud con AΓ; de modo que AZ, ZH también lo son [X 13]. Luego cada uno de los (rectángulos) AI, ZK es medial [X 21]. Como ΔE es, a su vez, conmensurable en longitud con EH, entonces ΔH es también conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) ΔE, EH [X 15]. Pero HΔ es expresable e inconmensurable en longitud con AΓ [X 13]. Por tanto, cada una de las (rectas) ΔE, EH es expresable e inconmensurable en longitud con AΓ. Luego cada uno de los (rectángulos) ΔΘ, EK es medial [X 21]. Y como AH, HΔ son conmensurables sólo en cuadrado, entonces AH es inconmensurable en longitud con HΔ. Pero AH es conmensurable en longitud con AZ, y ΔH con EH; luego AZ es inconmensurable en longitud con EH [X 13]. Pero como AZ es a EH, así AI a EK [VI 1]; por tanto, AI es inconmensurable con EK [X 11].

Pues bien, constrúyase el cuadrado ΛΜ igual a ΑΙ y quítese ΝΞ igual a ΖΚ y que esté en torno al mismo ángulo que ΛΜ; entonces ΛΜ, ΝΞ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea su diagonal ΟΡ y constrúyase la figura. Así pues, como el (rectángulo comprendido) por ΑΖ, ΖΗ es igual al cuadrado de ΕΗ, entonces, como ΑΖ es a ΕΗ, así ΕΗ a ΖΗ; y como ΑΖ es a ΕΗ, así ΑΙ a ΕΚ; y como ΕΗ es a ΖΗ, así ΕΚ a ΖΚ [VI 11]; y como ΑΙ es a ΕΚ, así ΕΚ a ΖΚ, luego ΕΚ es media proporcional de los (rectángulos) ΑΙ, ΖΚ. Y ΜΝ es también media proporcional de los cuadrados ΛΜ, ΝΞ; y ΑΙ es igual a ΛΜ y ΖΚ a ΝΞ; por tanto ΕΚ es igual a ΜΝ. Pero ΜΝ es igual a ΛΞ, y ΕΚ es igual a ΔΘ; entonces también el (rectángulo) entero ΔΚ es igual al gnomon ΥΦΧ y ΝΞ; y ΑΚ es igual a ΛΜ, ΝΞ; luego el resto ΑΒ es igual a ΣΤ, es decir al cuadrado de ΛΝ; por tanto, ΛΝ es el lado del cuadrado equivalente al área ΑΒ.

Digo que ΛΝ es una segunda apótoma de una medial.

Pues como se ha demostrado que ΑΙ, ΖΚ son mediales y son también iguales a los (cuadrados) de ΛΟ, ΟΝ, entonces cada uno de los (cuadrados) de ΛΟ, ΟΝ es también medial; luego cada una de las (rectas) ΛΟ, ΟΝ es también medial. Y puesto que ΑΙ es conmensurable con ΖΚ [VI 1 y X 11], entonces el (cuadrado) de ΛΟ es también conmensurable con el (cuadrado) de ΟΝ. Como se ha demostrado, a su vez, que ΑΙ es inconmensurable con ΕΚ, entonces ΛΜ es también inconmensurable con ΜΝ, es decir, el cuadrado de ΛΟ con el (rectángulo comprendido) por ΛΟ, ΟΝ; de modo que ΛΟ es también inconmensurable con ΟΝ [VI 1 y X 11]; luego ΛΟ, ΟΝ son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado.

Digo ahora que también comprenden un (rectángulo) medial.

Pues como se ha demostrado que ΕΚ es medial y es igual al (rectángulo comprendido) por ΛΟ, ΟΝ, entonces el (rectángulo comprendido) por ΛΟ, ΟΝ es también medial; de modo que ΛΟ,

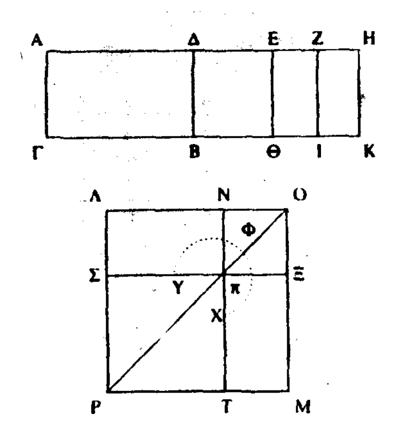
ON son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) medial. Luego AN es una segunda apótoma de una medial [X 75]; y es el lado del cuadrado equivalente al área AB.

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área AB es una segunda apótoma de una medial. Q. E. D.

Proposición 94

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una cuarta apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una (recta) «menor».

Pues sea comprendida el área AB por la (recta) expresable AΓ y la cuarta apótoma AΔ.



Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es una (recta) «menor».

Pues sea ΔH la adjunta a AΔ; entonces AH, HΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y AH es con-

mensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΑΓ, y el cuadrado de la (recta) entera ΑΗ es mayor que el de la adjunta ΔΗ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (ΑΗ) [X Ter. Def. 4]. Pues bien, como el cuadrado de ΑΗ es mayor que el de ΗΔ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (ΑΗ), entonces, si se aplica a ΑΗ un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔΗ deficiente en la figura de un cuadrado, la dividirá en (partes) inconmensurables [X 18]. Así pues, divídase ΔΗ en dos partes iguales por el (punto) Ε y aplíquese a ΑΗ un paralelogramo igual al (cuadrado) de ΕΗ deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por ΑΖ, ΖΗ; entonces ΑΖ es inconmensurable en longitud con ΖΗ. Trácense, pues, por los (puntos) Ε, Ζ, Η las (rectas) ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ paralelas a ΑΓ, ΒΔ. Como en efecto ΑΗ es expresable y conmensurable en longitud con ΑΓ, entonces el (área) entera ΑΚ es expresable [X 19]. Y puesto que, a su vez, ΔΗ es inconmensurable en longitud con ΑΓ y ambas son expresables, entonces ΔΚ es medial [X 21]. Y puesto que a su vez ΑΖ es inconmensurable en longitud con ΖΗ, entonces ΑΙ es también inconmensurable con ΖΚ [VI 1 y X 11]. Pues bien, constrúyase el cuadrado ΛΜ igual a ΑΙ y quítese ΝΞ igual a ΖΚ y que está en torno al mismo ángulo ΛΟΜ. Entonces los cuadrados ΛΜ, ΝΞ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea su diagonal ΟΡ y constrúyase la figura. Así pues, como el (rectángulo comprendido) por ΑΖ, ΖΗ es igual al (cuadrado) de ΕΗ, entonces, proporcionalmente, como ΑΖ es a ΕΗ, así ΑΙ a ΕΚ, y como ΕΗ es a ΖΗ, así ΕΚ a ΖΚ [VI 1]; entonces ΕΚ es media proporcional de ΑΙ, ΖΚ [V 11]. Pero ΜΝ es también media proporcional de los cuadrados ΛΜ, ΝΞ y ΑΙ es igual a ΛΜ, y ΖΚ a ΝΞ; luego ΕΚ es igual a ΜΝ. Pero ΔΘ es igual a ΕΚ y ΛΞ es igual a ΜΝ. Por tanto, el (área) entera ΔΚ es igual al gnomon ΥΦΧ y ΝΞ. Pues bien, como el (área) entera ΑΚ es igual a los cuadrados ΛΜ, ΝΞ donde ΔΚ es igual al gno-

mon ΥΦΧ y el cuadrado ΝΞ, entonces el (área) restante ΑΒ es igual a ΣΤ, es decir al cuadrado de ΛΝ; luego ΛΝ es el lado del cuadrado equivalente al (área) ΑΒ.

Digo que ΛΝ es la (recta) no expresable llamada «menor». Pues como ΑΚ es expresable y es igual a los (cuadrados) de ΛΟ, ΟΝ, entonces la suma de los (cuadrados) de ΛΟ, ΟΝ es expresable. Como ΔΚ es a su vez medial y ΔΚ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΛΟ, ΟΝ, entonces el doble del (rectángulo comprendido) por ΛΟ, ΟΝ es medial. Y puesto que se ha demostrado que ΑΙ es inconmensurable con ΖΚ, entonces el cuadrado de ΛΟ es inconmensurable también con el cuadrado de ΟΝ. Luego ΛΟ, ΟΝ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas medial. Por tanto, ΛΝ es la recta no expresable llamada «menor» [X 76]; y es el lado del cuadrado equivalente al área ΑΒ.

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área ΑΒ es una (recta) «menor». Q. E. D.

Proposición 95

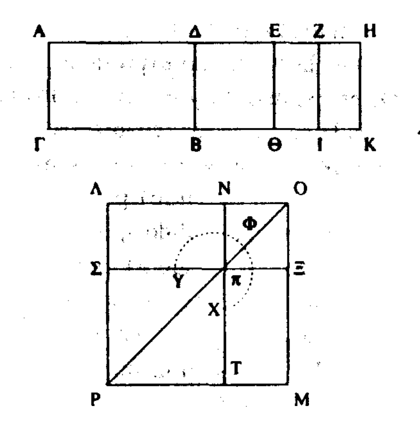
Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una quinta apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Pues sea comprendida el área ΑΒ por la (recta) expresable ΑΓ y la quinta apótoma ΑΔ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área ΑΒ es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Sea, pues, ΔΗ la adjunta a ΑΔ; entonces ΑΗ, ΗΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado y la (recta) ad-

junta HΔ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta AΓ, y el cuadrado de la (recta) entera AH es ma-



yor que el de la adjunta ΔH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AH) [X Ter. Def. 5]. Entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔH, deficiente en la figura de un cuadrado, la dividirá en partes inconmensurables [X 18]. Pues bien, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E, y aplíquese a AH un paralelogramo igual al (cuadrado) de EH deficiente en la figura de un cuadrado y sea el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH; entonces AZ es inconmensurable en longitud con ZH. Y puesto que AH es inconmensurable en longitud con ΓA y ambas son expresables, entonces AK es medial [X 21]. Como ΔH es a su vez expresable y conmensurable en longitud con AΓ, ΔK es expresable [X 19]. Así pues, constrúyase el cuadrado ΛM igual a AI, y quítese el cuadrado NΞ igual a ZK que esté en torno al mismo ángulo ΛOM; entonces los cuadrados ΛM, NΞ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea OP su diagonal y constrúyase la figura. De manera semejante demostraríamos que ΛN es el lado del cuadrado igual al área AB.

Digo que AN es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Pues como se ha demostrado que AK es medial y es igual a los (cuadrados) de AO, ON, entonces la suma de los (cuadrados) de AO, ON es medial. Y puesto que ΔK es a su vez expresable y es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AO, ON, también éste mismo es expresable. Y como AI es inconmensurable con ZK, entonces el (cuadrado) de AO es inconmensurable con el cuadrado de ON. Luego AO, ON son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas expresable. Por tanto, la (recta) restante AN es la (recta) no expresable llamada la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial [X 77]. Y es el lado del cuadrado equivalente al área AB.

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área AB es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial. Q. E. D.

Proposición 96

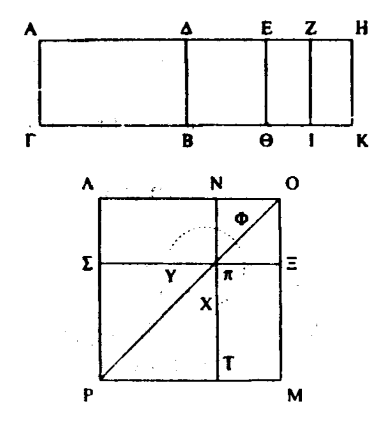
Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una sexta apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) que hace con un área medial un (área) entera medial.

Pues sea comprendida el área AB por la (recta) expresable AΓ y la sexta apótoma AΔ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente a AB es la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Pues sea ΔH la adjunta a AΔ; entonces AH, HΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado y ninguna de

ellas es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta AΓ y el cuadrado de la (recta) entera AH es mayor



que el de la adjunta ΔH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (AH) [X Ter. Def. 6]: pues bien, como el cuadrado de AH es mayor que el de HΔ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (AH), entonces, si se aplica a AH un paralelogramo igual a la cuarta parte del (cuadrado) ΔH deficiente en la figura de un cuadrado, lo dividirá en partes inconmensurables [X 18].

Así pues, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E, y aplíquese a AH un paralelogramo igual al (cuadrado) de EH, deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH; entonces AZ es inconmensurable en longitud con ZH. Pero, como AZ es a ZH, así AI a ZK [VI 1]; luego AI es inconmensurable con ZK [X 11]. Y puesto que AH, AΓ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, AK es medial [X 21]. Puesto que AΓ, ΔH son, a su vez, expresables e inconmensurables en longitud, ΔK es también medial [X 21]. Pues bien, como AH, HΔ son conmensurables sólo en cuadrado, entonces AH es inconmensurable en longitud con HΔ.

Pero como AH es a HΔ, así AK a KΔ [VI 1]; luego AK es inconmensurable con KΔ [X 11]. Constrúyase, pues, el cuadrado ΛM igual a AI, y quítese NΞ igual a ZK y en torno al mismo ángulo; entonces los cuadrados ΛM, NΞ están en torno a la misma diagonal [X 26]. Sea su diagonal OP y constrúyase la figura. De manera semejante a los (teoremas) anteriores demostraríamos que ΛN es el lado del cuadrado equivalente al (área) AB.

Digo que ΛN es la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Pues como se ha demostrado que AK es medial y es también igual a los (cuadrados) de ΛO, ON, entonces la suma de los (cuadrados) de ΛO, ON es medial. Como se ha demostrado a su vez que ΔK es medial y es igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΛO, ON, el doble del (rectángulo comprendido) por ΛO, ON es medial. Y como se ha demostrado que AK es inconmensurable con ΔK, los cuadrados de ΛO, ON son también inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ΛO, ON. Y puesto que AI es inconmensurable con ZK, entonces el (cuadrado) de ΛO es inconmensurable con el (cuadrado) de ON; luego ΛO, ON son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas medial y además sus cuadrados inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ellas. Por tanto, ΛN es la (recta) no expresable llamada la que hace con un (área) medial un (área) entera medial [X 78]; y es el lado del cuadrado equivalente al área AB.

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) que hace con un (área) medial un área entera medial. Q. E. D.

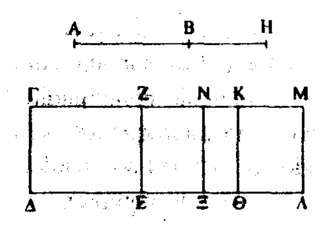
PROPOSICIÓN 97

El cuadrado de una apótoma aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una primera apótoma.

Sea AB la apótoma y ΓΔ la (recta) expresable y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓE igual al cuadrado de AB que produzca la anchura ΓZ.

Digo que ΓZ es una primera apótoma.

Sea, pues, BH la adjunta a AB; entonces AH, HB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓΘ igual al (cuadrado) de AH, y el (paralelogramo) KΛ igual al cuadrado de BH. Entonces el (paralelogramo) entero ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB; luego el (área) restante ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [II 7]. Divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese por el (punto) N la (recta) NΞ paralela a ΓΔ; entonces cada uno de los (rectángulos) ZΞ, ΛN es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB. Y como los (cuadrados) de AH, HB son expresables, y ΔM es igual a los (cuadrados) de AH, HB, entonces ΛM es expresable, y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΔ produciendo la anchura ΓM; luego ΓM es expresable y conmensurable en longitud con ΓΔ [X 20]. Como el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es a su vez medial, y ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB, entonces ZΛ es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΔ produciendo la anchura ZM; entonces ZM es expresable e inconmensurable en longitud con



ΓΔ [X 22]. Y como los (cuadrados) de AH, HB son expresables, mientras que el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es medial, entonces los (cuadrados) de AH, HB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB. Y ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB y ZΛ al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB; así pues ΔM es inconmensurable con ZΛ. Pero, como ΔM es a ZΛ, así ΓM a ZM [VI 1]. Entonces ΓM es inconmensurable en longitud con ZM [X 11]. Y ambas son expresables; luego ΓM, MZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto, ΓZ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que es también primera.

Pues como el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de los cuadrados de AH, HB, y ΓΘ es igual al (cuadrado) de AH, mientras que KΛ es igual al (cuadrado) de BH y NΛ al (rectángulo comprendido) por AH, HB, entonces NΛ es media proporcional de ΓΘ, KΛ; luego, como ΓΘ es a NΛ, así NΛ a KΛ. Pero como ΓΘ es a NΛ, así ΓK a NM; y como NΛ es a KΛ, así NM a KM [VI 1]; entonces el (rectángulo comprendido) por ΓK, KM, es igual al (cuadrado) de NM [VI 17], es decir a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM. Ahora bien, puesto que el (cuadrado) de AH es conmensurable con el de HB, ΓΘ es también conmensurable con KΛ. Pero como ΓΘ es a KΛ, así ΓK a KM [VI 1]; entonces ΓK es conmensurable con KM [X 11]. Pues bien, como ΓM, MZ son dos rectas desiguales y se ha aplicado a ΓM el (rectángulo comprendido) por ΓK, KM igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM y deficiente en la figura de un cuadrado, y ΓK es conmensurable con KM, entonces el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (ΓM) [X 17]. Y ΓM es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΓΔ; por tanto ΓZ es una primera apótoma [X Ter. Def. 1].

Por consiguiente, el (cuadrado) de una apótoma aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una primera apótoma. Q. E. D.

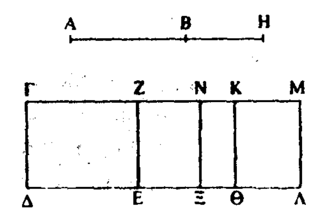
Proposición 98

El cuadrado de una primera apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una segunda apótoma.

Sea, pues, AB la primera apótoma de una medial y ΓΔ la (recta) expresable, y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓE igual al (cuadrado) de AB que produzca la anchura ΓZ.

Digo que ΓZ es una segunda apótoma.

Pues sea BH la adjunta a AB; entonces AH, HB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) expresable [X 74]. Y aplíquese a ΓΔ el paralelogramo ΓΘ igual al (cuadrado) de AH produciendo la anchura ΓK, y el (paralelogramo) KΛ igual al (cuadrado) de HB produciendo la anchura KM; entonces el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB; así pues ΓΛ es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΔ produciendo la anchura ΓM; entonces ΓM es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22]. Y como ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB donde el (cuadrado) de AB es igual a ΓE, entonces el (área) restante, el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB, es igual a ZΛ [II 7]. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es expresable; luego ZΛ es expresable. Y se ha aplicado a la



(recta) expresable ZE produciendo la anchura ZM; por tanto, ZM es también expresable y conmensurable en longitud con ΓΔ [X 20]. Pues bien, como (la suma de) los (cuadrados) de AH, HB, es decir ΓΛ, es medial, mientras que el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB, es decir, ZΛ es expresable, entonces ΓΛ es inconmensurable con ZΛ. Pero como ΓΛ es a ZΛ, así ΓM a ZM [VI 1]; entonces ΓM es inconmensurable en longitud con ZM [X 11]: y ambas son expresables; luego ΓM, MZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, por tanto, ΓZ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que también es segunda.

Pues divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese, por el (punto) N, la (recta) NΞ paralela a ΓΔ; entonces cada una de las (áreas) ZΞ, NΛ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB; y puesto que el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de los (cuadrados) de AH, HB, y el cuadrado de AH es igual a ΓΘ, mientras que el (rectángulo comprendido) por AH, HB es (igual) a NΛ y el (cuadrado) de BH a KΛ, entonces NΛ es media proporcional de ΓΘ, KΛ. Luego, como ΓΘ es a NΛ, así NΛ a KΛ. Pero como ΓΘ es a NΛ, así ΓK a NM, y como NΛ es a KΛ, así NM a MK [VI 1]; entonces, como ΓK es a NM, así NM a KM [V 11]; luego el (rectángulo comprendido) por ΓK, KM es igual al (cuadrado) de NM [VI 17], es decir a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM. Pues bien, como ΓM, MZ son dos rectas desiguales, y se ha aplicado a la mayor, ΓM, el (rectángulo comprendido) por ΓK, KM igual a la cuarta parte del (cuadrado) de MZ, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en partes conmensurables, entonces el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (ΓM) [X 17]. Y la adjunta ZM es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΓΔ; luego ΓZ es una segunda apótoma [X Ter. Def. 2]

Por consiguiente, el cuadrado de la primera apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una segunda apótoma. Q. E. D.

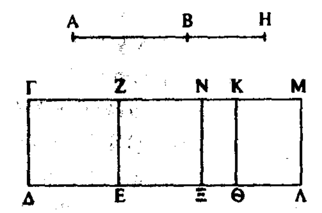
Proposición 99

El cuadrado de una segunda apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una tercera apótoma.

Sea AB la segunda apótoma de una medial, y ΓΔ la (recta) expresable, y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓE igual al (cuadrado) de AB produciendo la anchura ΓZ.

Digo que ΓZ es una tercera apótoma.

Sea, pues, BH la adjunta a AB; entonces AH, HB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) medial [X 75]. Y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓΘ igual al (cuadrado) de AH produciendo la anchura ΓK, y aplíquese a KΘ el (paralelogramo) KΛ igual al (cuadrado) de BH produciendo la anchura KM;



entonces el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB; luego ΓΛ es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΔ produciendo la anchura ΓM; por tanto ΓM es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 23]. Y como el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB, entonces el (área) restante ΛZ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [II 7]. Pues bien, divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese NΞ paralela a ΓΔ; entonces

cada una de las (áreas) ZΞ, NΛ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB. Pero el (rectángulo comprendido) por AH, HB es medial; entonces ZΛ es también medial. Y se ha aplicado a la recta expresable EZ produciendo la anchura ZM; luego ZM es también expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22]. Y como AH, HB son conmensurables sólo en cuadrado, entonces AH es inconmensurable en longitud con HB; luego el (cuadrado) de AH es también inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AH, HB [VI 1 y X 11]. Pero los (cuadrados) de AH, HB son conmensurables con el (cuadrado) de AH, y el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB con el (rectángulo comprendido) por AH, HB; así pues los (cuadrados) de AH, HB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [X 13].

Pero ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, mientras que ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB; entonces ΓΛ es inconmensurable con ZΛ.

Pero como ΓΛ es a ZΛ, así ΓM a ZM [VI 1]. Entonces, ΓM es inconmensurable en longitud con ZM. Y ambas son expresables; luego ΓM, MZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto ΓZ es apótoma [X 73].

Digo ahora que también es tercera.

Pues como el (cuadrado) de AH es conmensurable con el (cuadrado) de HB, entonces ΓΘ es conmensurable con KΛ; de modo que ΓK lo es también con KM [VI 1 y X 11]. Y como el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de los (cuadrados) de AH, HB, y ΓΘ es igual a AH, mientras que KΛ es igual al (cuadrado) de HB, y NΛ al (rectángulo comprendido) por AH, HB, entonces NΛ es también media proporcional de ΓΘ, KΛ; luego, como ΓΘ es a NΛ, así NΛ a KΛ. Pero como ΓΘ es a NΛ, así ΓK a NM, y como NΛ es a KΛ, así NM a KM [VI 1]; entonces, como ΓK es a MN, así MN a KM [V 11]; luego el rectángulo comprendido) por ΓK, KM es igual [al cuadrado de MN,

es decir] [40] a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM. Pues bien, como ΓM, MZ son dos rectas desiguales y se ha aplicado a ΓM un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en (partes) conmensurables, entonces el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΓM) [X 17]; y ninguna de las (rectas) ΓM, MZ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΓΔ; por tanto ΓZ es una tercera apótoma [X Ter. Def. 3].

Por consiguiente, el cuadrado de una segunda apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una tercera apótoma. Q. E. D.

Proposición 100

El cuadrado de una (recta) «menor», aplicado a una (recta) expresable produce como anchura un cuarta apótoma.

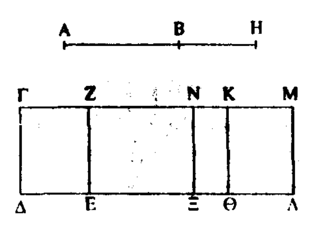
Sea AB la (recta) «menor», y ΓΔ la expresable, y aplíquese a la (recta) expresable ΓΔ el (paralelogramo) ΓE igual al cuadrado de AB, produciendo la anchura ΓZ.

Digo que ΓZ es una cuarta apótoma.

Sea, pues, BH la adjunta a AB; entonces AH, HB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de los cuadrados de AH, HB expresable y el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB medial [X 76]. Y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓΘ igual al (cuadrado) de AH produciendo la anchura ΓK, y el (paralelogramo) KΛ igual al (cuadrado) de BH produciendo la anchura KM; entonces el (área) entera ΓΛ es

[40] Heiberg atetiza estas palabras que Heath mantiene en su traducción entre corchetes.

igual a los (cuadrados) de AH, HB. Y la suma de los (cuadrados) de AH, HB es expresable; entonces ΓΛ es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΔ produciendo la anchura ΓM; luego ΓM es también expresable y conmensurable en longitud con ΓΔ [X 20]. Y como el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB,



donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB, entonces el (área) restante ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [II 7]. Pues bien, divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese, por el (punto) N, la (recta) NΞ paralela a las dos (rectas) ΓΔ, MΛ; entonces, cada uno de los (rectángulos) ZΞ, NΛ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB. Y como el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es medial y es igual a ZΛ, entonces ZΛ también es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ZE produciendo la anchura ZM; luego ZM es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22]. Y puesto que la suma de los (cuadrados) de AH, HB es expresable, mientras que el (rectángulo comprendido) por AH, HB es medial, entonces los cuadrados de AH, HB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB. Pero ΓΛ es igual a los cuadrados de AH, HB y ZΛ al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB. Luego ΓΛ es inconmensurable con ZΛ. Pero como ΓΛ es a ZΛ, así ΓM a MZ [VI 1]; entonces ΓM es inconmensurable en longitud con MZ [X 11]. Y ambas son expresables; luego ΓM, MZ son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto ΓZ es una apótoma [X 73].

Digo que también es cuarta.

Pues como AH, HB son inconmensurables en cuadrado, entonces el (cuadrado) de AH es inconmensurable con el (cuadra-

do) de HB. Y ΓΘ es igual al (cuadrado) de AH, mientras que KΛ es igual al (cuadrado) de HB; así pues, ΓΘ es inconmensurable con KΛ. Pero como ΓΘ es a KΛ, así ΓK a KM [VI 1]. Entonces ΓK es inconmensurable en longitud con KM. Y como el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de la suma de los (cuadrados) de AH, HB, y ΓΘ es igual al (cuadrado) de AH, mientras que el (cuadrado) de HB es igual a KΛ, y el (rectángulo comprendido) por AH, HB a NΛ, entonces NΛ es media proporcional de ΓΘ, KΛ; luego como ΓΘ es a NΛ, así NΛ a KΛ; pero como ΓΘ es a NΛ, así ΓK a NM y como NΛ es a KΛ, así NM a KM [VI 1]; entonces, como ΓK es a MN, así MN a KM [V 11]. Luego el (rectángulo comprendido) por ΓK, KM es igual al (cuadrado) de MN [VI 17], es decir a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM. Pues bien, como ΓM, MZ son dos rectas desiguales, y se ha aplicado a ΓM el (rectángulo comprendido) por ΓK, KM igual a la cuarta parte del (cuadrado) de MZ, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en (partes) inconmensurables, entonces el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓM) [X 18]. Y la (recta) entera ΓM es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΓΔ; por tanto, ΓZ es una cuarta apótoma [X Ter. Def. 4].

Por consiguiente, el (cuadrado) de una (recta) «menor»... etc. Q. E. D.

Proposición 101

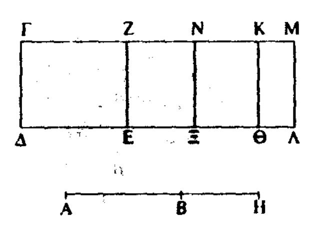
El cuadrado de la recta que hace con un (área) expresable un (área) entera medial, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una quinta apótoma.

Sea, pues, AB la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial, y ΓΔ la (recta) expresable, y aplíquese a

ΓΔ el (paralelogramo) ΓE igual al (cuadrado) de AB produciendo la anchura ΓZ.

Digo que ΓZ es una quinta apótoma.

Sea, pues, BH la (recta) adjunta a AB. Entonces, AH, HB son rectas inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas expresable [X 77]. Y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓΘ igual al (cuadrado) de AH, y el (paralelogramo) KΛ igual al (cuadrado) de HB; entonces el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB. Pero la suma de los (cuadrados) de AH, HB es medial; entonces ΓΛ es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΔ produciendo la anchura ΓM; luego ΓM es expresable e inconmensurable con ΓΔ [X 22]. Y como el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB, entonces el (área) restante ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [II 7]. Pues bien, divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese por el (punto) N, la (recta) NΞ paralela a las dos (rectas) ΓΔ, MΛ; entonces cada uno de los (rectángulos) ZΞ, NΛ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB. Y puesto que el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es expresable y es igual a ZΛ, entonces ZΛ es expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura ZM; luego ZM es expresable y conmensurable en longitud con ΓΔ [X 20]. Y como ΓΛ es medial y ZΛ expresable, entonces ΓΛ es inconmensurable con ZΛ. Pero como ΓΛ es a ZΛ, así ΓM a MZ [VI 1]; entonces ΓM es inconmensurable en longitud con MZ [X 11]. Y ambas son expresables; luego ΓM, MZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto ΓZ es una apótoma [X 73].



Digo ahora que también es quinta.

Pues de manera semejante demostraríamos que el (rectángulo) ΓΚ, ΚΜ es igual al (cuadrado) de ΝΜ, es decir, a la cuarta parte del (cuadrado) de ΖΜ.

Y puesto que el (cuadrado) de ΑΗ es inconmensurable con el (cuadrado) de ΗΒ, mientras que el (cuadrado) de ΑΗ es igual a ΓΘ, y el (cuadrado) de ΗΒ a ΚΛ, entonces ΓΘ es inconmensurable con ΚΛ. Pero como ΓΘ es a ΚΛ, así ΓΚ a ΚΜ [VI 1]; luego ΓΚ es inconmensurable en longitud con ΚΜ [X 11]. Pues bien, como ΓΜ, ΜΖ son dos rectas desiguales y se ha aplicado a ΓΜ un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de ΖΜ, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en (partes) inconmensurables, entonces, el cuadrado de ΓΜ es mayor que el de ΜΖ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓΜ) [X 18]. Y la adjunta ΖΜ es conmensurable con la (recta) expresable propuesta ΓΔ.

Por consiguiente, ΓΖ es una quinta apótoma [X Ter. Def. 5]. Q. E. D.

Proposición 102

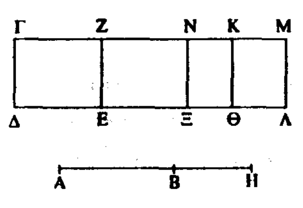
El cuadrado de la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una sexta apótoma.

Sea, pues, ΑΒ la que hace con un (área) medial un (área) entera medial y ΓΔ la (recta) expresable, y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓΕ igual al (cuadrado) de ΑΒ produciendo la anchura ΓΖ.

Digo que ΓΖ es una sexta apótoma.

Sea, pues, ΒΗ la adjunta a ΑΒ; entonces ΑΗ, ΗΒ, son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΗ,

HB medial y los cuadrados de AH, HB inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [X 78]. Pues bien, aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓΘ igual al (cuadrado) de AH produciendo la anchura ΓK y el (paralelogramo) KΛ igual al (cuadrado) de BH; entonces el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB; luego ΓΛ es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΔ produciendo la anchura ΓM; así pues, ΓM es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22]. Pues bien, como ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB, entonces, el (área) restante ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [II 7]. Y el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es medial; luego ZΛ es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ZE produciendo la anchura ZM; luego ZM es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22]. Y puesto que los (cuadrados) de AH, HB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB y ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, y ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB, entonces ΓΛ es inconmensurable con ZΛ. Pero como ΓΛ es a ZΛ, así ΓM a MZ [VI 1]; entonces ΓM es inconmensurable en longitud con MZ [X 11]. Y ambas son expresables. Luego ΓM, MZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto ΓZ es una apótoma [X 73].



Digo ahora que también es sexta.

Pues como ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB, divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese por el (punto) N la (recta) NΞ paralela a ΓΔ; entonces cada una de las (áreas) ZΞ, NΛ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB. Y como AH, HB son inconmensura-

bles en cuadrado, entonces el (cuadrado) de AH es inconmensurable con el (cuadrado) de HB. Pero ΓΘ es igual al (cuadrado) de AH, y KΛ es igual al (cuadrado) de HB. Así pues, ΓΘ es inconmensurable con KΛ. Pero como ΓΘ es a KΛ, así ΓK a KM [VI 1]; luego ΓK es inconmensurable con KM [X 11]; y puesto que el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de los cuadrados de AH, HB, y ΓΘ es igual al (cuadrado) de AH, mientras que KΛ es igual al (cuadrado) de HB, y NΛ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB, entonces NΛ es también media proporcional de ΓΘ, KΛ; por tanto, como ΓΘ es a NΛ, así NΛ a KΛ. Y por lo mismo, el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓM) [X 18]. Y ninguna de ellas es conmensurable con la (recta) expresable propuesta ΓΔ.

Por consiguiente, ΓZ es una sexta apótoma. Q. E. D.

Proposición 103

Una recta conmensurable en longitud con una apótoma es apótoma y del mismo orden.

Sea AB una apótoma, y sea ΓΔ conmensurable en longitud con ella.

Digo que ΓΔ es apótoma y del mismo orden que AB.

Pues como AB es una apótoma, sea BE la adjunta a ella; entonces AE, EB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y hágase de forma que ΓΔ guarde con AB la misma razón que BE con ΔZ [VI 12]; entonces como una es a una, así todas a todas [V 12][41]; luego como la (recta) entera AE

[41] Se entiende: «como una de las magnitudes antecedentes es a una de las consecuentes, así todas las antecedentes a todas las consecuentes».

es a la (recta) entera ΓZ, así también AB a ΓΔ. Pero AB es conmensurable en longitud con ΓΔ. Entonces AE es también conmensurable con ΓZ y BE con ΔZ [X 11]. Ahora bien, AE, EB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΓZ, ZΔ son también (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 13].

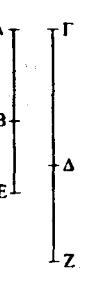
Ahora bien, dado que, como AE es a ΓZ, así BE a ΔZ, entonces, por alternancia, como AE es a EB, así ΓZ a ZΔ [VI 16]. Así pues, el cuadrado de AE es mayor que el de EB o bien en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con (AE), o bien en el de una inconmensurable con ella. Pues bien, si el cuadrado de AE es mayor que el de EB en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AE), el cuadrado de ΓZ también será mayor que el de ZΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΓZ) [X 14]. Y si AE es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también lo será ΓZ [X 12], pero, si BE, también ΔZ [id], y si ninguna de las (rectas) AE, EB (lo es), tampoco (lo será) ninguna de las (rectas) ΓZ, ZΔ [X 13]. Pero si el cuadrado de AE es mayor que [el de EB] en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AE), el cuadrado de ΓZ será también mayor que el de ZΔ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓZ) [X 14]. Ahora bien, si AE es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también ΓZ, y si BE (lo es), también ΔZ [X 12], pero si no lo es ninguna de las (rectas) AE, EB tampoco lo será ninguna de las (rectas) ΓZ, ZΔ [X 13].

Por consiguiente, ΓΔ es apótoma y del mismo orden que AB. Q. E. D.

Proposición 104

Una recta conmensurable con una apótoma de una medial es apótoma de una medial y del mismo orden.

Sea, pues, AB una apótoma de una medial, y sea ΓΔ conmensurable en longitud con AB; digo que ΓΔ es también apótoma de una medial y del mismo orden que AB.



Pues como AB es una apótoma de una medial, sea EB la adjunta. Entonces AE, EB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado [X 74, 75]. Y hágase de forma que, como AB es a ΓΔ, así BE a ΔZ [VI 12]; entonces AE es también conmensurable con ΓZ y BE con ΔZ [V 12 y X 11]. Pero AE, EB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado; entonces ΓZ, ZΔ son también rectas mediales [X 23] conmensurables sólo en cuadrado [X 13]; luego ΓΔ es apótoma de una medial [X 74, 75].

Digo ahora que es también del mismo orden que AB.

Pues, como AE es a EB, así ΓZ a ZΔ, entonces, como el (cuadrado) de AE es al (rectángulo comprendido) por AE, EB, así el (cuadrado) de ΓZ al (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ. Pero el (cuadrado) de AE es conmensurable con el de ΓZ; luego el (rectángulo comprendido) por AE, EB es también conmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ [V 6 y X 11]. Pues bien, si el (rectángulo comprendido) por AE, EB es expresable, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ será también expresable [X Def. 4], si el (rectángulo comprendido) por AE, EB es medial, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ es también medial [X 23 Por.].

Por consiguiente, ΓΔ es una apótoma de una medial y del mismo orden que AB. Q. E. D.

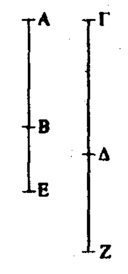
PROPOSICIÓN 105

Una (recta) conmensurable con una (recta) «menor» es «menor».

Sea, pues, AB la recta «menor» y ΓΔ conmensurable con ella.

Digo que ΓΔ es «menor».

Pues hágase lo mismo (que antes); y como AE, EB son inconmensurables en cuadrado [X 76], entonces ΓZ, ZΔ son también inconmensurables en cuadrado [X 13]. Pues bien, dado que, como AE es a EB, así ΓZ a ZΔ [VI 12 y V 16], entonces, como el (cuadrado) de AE es al de EB, así también el (cuadrado) de ΓZ al de ZΔ [VI 22]. Luego, por composición, como los (cuarados) de AE, EB son al (cuadrado) de EB, así los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ al (cuadrado) de ZΔ [V 18]; pero el (cuadrado) de BE es conmensurable con el de ΔZ; entonces la suma de los cuadrados de AE, EB es conmensurable con la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ [V 16 y X 11]. Pero la suma de los cuadrados de AE, EB es expresable [X 76], así pues, la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ es también expresable [X Def. 4]. Puesto que, a su vez, como el (cuadrado) de AE es al (rectángulo comprendido) por AE, EB, así el (cuadrado) de ΔZ al (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ, mientras que el (cuadrado) de AE es conmensurable con el cuadrado de ΓZ, entonces, el (rectángulo comprendido) por AE, EB es también conmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ. Pero el (rectángulo comprendido) por AE, EB es medial [X 76]; entonces el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ es también medial [X 23 Por.]; luego ΓZ, ZΔ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma



de sus cuadrados expresable y el (rectángulo comprendido) por ellas medial.

Por consiguiente, ΓΔ es «menor». Q. E. D.

Proposición 106

Una (recta) conmensurable con la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial es también una (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Sea AB la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial y ΓΔ conmensurable con ella.

A Γ B Δ E Z

Digo que ΓΔ es también una (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Sea, pues, BE la adjunta a AB; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de los cuadrados de AE, EB medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable [X 77]. Sígase la misma construcción (que antes). Demostraríamos de manera semejante a los (teoremas) anteriores que ΓZ, ZΔ guardan la misma razón que AE, EB y la suma de los cuadrados de AE, EB es conmensurable con la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ y el (rectángulo comprendido) por AE, EB con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ; de modo que ΓZ, ZΔ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable.

Por consiguiente, ΓΔ es una (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial [X 77]. Q. E. D.

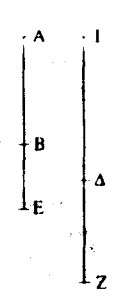
PROPOSICIÓN 107

Una (recta) conmensurable con la que hace con un (área) medial un (área) entera medial es también ella misma una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Sea AB una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial y sea ΓΔ conmensurable con AB.

Digo que ΓΔ es también una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Sea, pues, BE la adjunta a AB, y sígase la misma construcción; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas también medial y además la suma de sus cuadrados inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ellas [X 78]. Ahora bien, según se ha demostrado, AE, EB son conmensurables con ΓZ, ZΔ, y la suma de los cuadrados de AE, EB con la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ, y el (rectángulo comprendido) por AE, EB con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ; entonces ΓZ, ZΔ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas también medial y además la suma de sus cuadrados inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ellas.

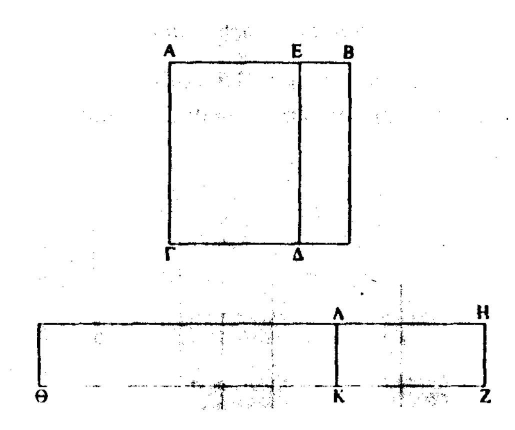


Por consiguiente, ΓΔ es una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial [X 78]. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 108

Si de un (área) expresable se quita un (área) medial, el lado del cuadrado equivalente al área restante es una de estas dos (rectas) no expresables: o bien una apótoma o bien una «menor».

Quítese, pues, del (área) expresable ΒΓ el (área) medial ΒΔ. Digo que el lado del cuadrado equivalente al área restante ΕΓ es una de estas dos (rectas) no expresables; o bien una apótoma o bien una «menor».



Pues póngase la (recta) expresable ZH, y aplíquese a ZH el paralelogramo rectángulo HΘ igual a ΒΓ, y quítese el (paralelogramo) HK igual a ΔΒ; entonces el (área) restante ΕΓ es igual a ΛΘ. Pues bien, como ΒΓ es expresable, mientras que ΒΔ es medial, y ΒΓ es igual a HΘ, mientras que ΒΔ es (igual) a HK, entonces HΘ es expresable y HK medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable ZH; luego ZΘ es expresable y conmensurable en longitud con ZH [X 20]; y ZK es expresable e inconmensura-

ble en longitud con ZH [X 22]; por tanto, ZΘ es inconmensurable en longitud con ZK [X 13]. Entonces ZΘ, ZK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego KΘ es una apótoma [X 73], y KZ la adjunta a ella. Entonces el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) o conmensurable con (ΘZ) o no.

Sea, en primer lugar, su cuadrado mayor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable. Ahora bien, la (recta) entera ΘZ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH; luego KΘ es una primera apótoma [X Ter. Def. 1]. Pero el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una primera apótoma, es una apótoma [X 91]. Luego el lado del cuadrado equivalente a ΛΘ, es decir a EΓ, es una apótoma.

Pero si el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΘZ) y la (recta) entera ZΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH, KΘ es una cuarta apótoma [X Ter. def. 4]. Y el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una cuarta apótoma es una (recta) «menor» [X 92]. Q. E. D.

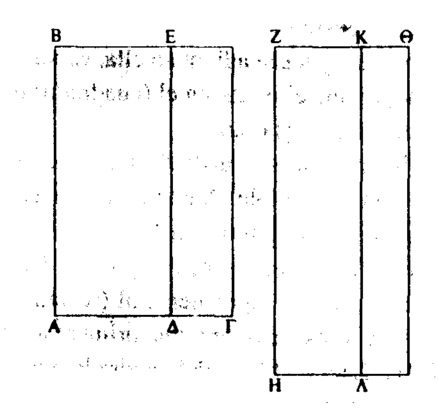
Proposición 109

Si se quita de un (área) medial un (área) expresable, resultan otras dos rectas no expresables: o bien la primera apótoma de una medial, o bien la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Quítese, pues, del (área) medial BΓ el (área) expresable BΔ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al (área) restante EΓ es una de estas dos (rectas) no expresables, o bien la prime-

ra apótoma de una medial, o bien la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.



Pues bien, póngase la (recta) expresable ZH y aplíquense las áreas de manera semejante (a los teoremas precedentes). Ahora, en consecuencia, ZΘ es expresable e inconmensurable en longitud con ZH, mientras que KZ es expresable y conmensurable en longitud con ZH; entonces ZΘ, ZK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 13], luego KΘ es una apótoma y ZK la adjunta a ella [X 73]. Así pues, el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK o bien en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con (ΘZ) o bien en el de una inconmensurable con ella.

Pues bien, si el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΘZ), y la adjunta a ella, ZK, es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH, KΘ es una segunda apótoma [X Ter. Def. 2]. Pero ZH es expresable; de modo que el lado del cuadrado equivalente al (área) ΛΘ, es decir a EΓ, es la primera apótoma de una medial [X 92].

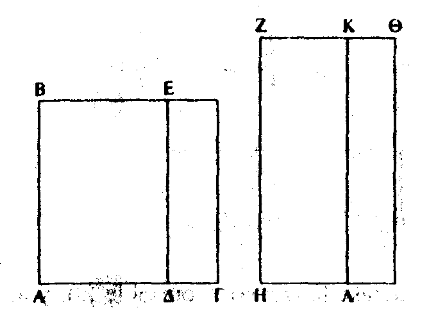
Pero si el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable, y la (recta) adjun-

ta ZK es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH, KΘ es una quinta apótoma [X Ter. Def. 5]; de modo que el lado del cuadrado equivalente a EΓ es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial [X 95] Q. E. D.

Proposición 110

Si se quita de un (área) medial otra (área) medial inconmensurable con el (área) entera, resultan las dos (rectas) no expresables restantes: o bien la segunda apótoma de una medial o bien la que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Quítese, pues, como en las construcciones anteriores, del (área) medial BΓ, el (área) medial BΔ inconmensurable con el (área) entera.



Digo que el lado del cuadrado equivalente al (área) EΓ es una de estas dos (rectas) no expresables, o bien la segunda apótoma de una medial, o bien la que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Pues como cada una de las (áreas) BΓ, BΔ es medial, y BΓ es inconmensurable con BΔ, en consecuencia, cada una de las dos

(rectas) ZΘ, ZK será expresable e inconmensurable en longitud con ZH [X 22]. Y puesto que BΓ es inconmensurable con BΔ, es decir HΘ con HK, ΘZ es también inconmensurable con ZK [VI 1 y X 11]; luego ZΘ, ZK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, KΘ es una apótoma [X 73].

Ahora bien, si el cuadrado de ZΘ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZΘ) y ninguna de las (rectas) ZΘ, ZK es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH, KΘ es una tercera apótoma [X Ter. Def. 3]. Pero KΛ es expresable, y el (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una tercera apótoma no es expresable, y el lado del cuadrado equivalente a él tampoco es expresable y se llama segunda apótoma de una medial [X 93]; de modo que el lado del cuadrado equivalente a ΛΘ, es decir a EΓ, es una segunda apótoma de una medial.

Pero si el cuadrado de ZΘ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZΘ) y ninguna de las (rectas) ΘZ, ZK es conmensurable en longitud con ZH, KΘ es una sexta apótoma [X Ter. Def. 6]. Pero el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una sexta apótoma es la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial [X 96].

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente a ΛΘ, es decir a EΓ, es una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial. Q. E. D.

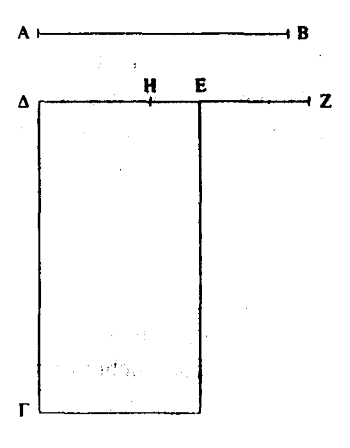
Proposición 111

La apótoma no es la misma que la binomial.

Sea AB una apótoma.

Digo que AB no es la misma que una binomial.

Pues, si es posible séalo. Póngase la (recta) expresable ΔΓ, y aplíquese a ΓΔ el rectángulo ΓΕ igual al (cuadrado) de ΑΒ produciendo la anchura ΔΕ. Pues bien, como ΑΒ es una apótoma, ΔΕ es una primera apótoma [X 97]. Sea ΕΖ la adjunta a ella; entonces ΔΖ, ΖΕ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de ΔΖ es mayor que el de ΖΕ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΔΖ), y ΔΖ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΔΓ [X Ter. Def. 1].



Como, a su vez, ΑΒ es una binomial, entonces ΔΕ es una primera binomial [X 60]. Divídase en sus términos por el punto Η, y sea ΔΗ el término mayor; entonces ΔΗ, ΗΕ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado y el (cuadrado) de ΔΗ es mayor que el de ΗΕ en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (ΔΗ), mientras que el (término) mayor ΔΗ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΔΓ [X Seg. Def. 1]. Luego ΔΖ es conmensurable en longitud con ΔΗ [X 12]; por tanto, la (recta) restante ΗΖ es también conmensurable en longitud con ΔΖ [X 15]. Pero ΔΖ es inconmensurable en longitud con ΕΖ; entonces ΖΗ es también inconmensurable en longitud con ΕΖ [X 13]. Luego ΗΖ, ΖΕ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto ΕΗ es una apótoma [X 73]. Pero también es expresable; lo cual es imposible.

Por consiguiente, la apótoma no es la misma que la binomial. Q. E. D.

La apótoma y las (rectas) no expresables subsiguientes no son las mismas que la medial ni entre sí.

Pues el cuadrado de una medial, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una (recta) expresable inconmensurable en longitud con aquella a la que se ha aplicado [X 22], mientras que el cuadrado de una apótoma, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una primera apótoma [X 97], y el (cuadrado) de la primera apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una segunda apótoma [X 98], mientras que el (cuadrado) de la segunda apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una tercera apótoma [X 99]; pero el (cuadrado) de una «menor», aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una cuarta apótoma [X 100]; y el cuadrado de la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una quinta apótoma [X 101], mientras que el cuadrado de la que hace con un (área) medial un (área) entera medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una sexta apótoma [X 102].

Pues bien, puesto que las antedichas anchuras difieren de la primera y entre sí, de la primera porque es expresable y entre sí porque no son del mismo orden, es evidente que también las propias (rectas) no expresables difieren entre sí. Y como se ha demostrado que la apótoma no es la misma que la binomial [X 111], sino que, aplicadas a una recta expresable, las subsiguientes a la apótoma producen como anchuras apótomas, cada una de acuerdo con su orden, mientras que las subsiguientes a la binomial (producen) como anchuras binomiales de acuerdo con su propio orden, entonces, las subsiguientes a la apótoma son diferentes y las subsiguientes a la binomial son diferentes, de modo que hay en la serie trece rectas no expresables en total:

Medial.
Binomial.
Primera bimedial.
Segunda bimedial.
«Mayor».
Lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial.
Lado del cuadrado equivalente a dos (áreas) mediales.
Apótoma.
Primera apótoma de una medial.
Segunda apótoma de una medial.
«Menor».
La que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.
La que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

[PROPOSICIÓN 112[42]

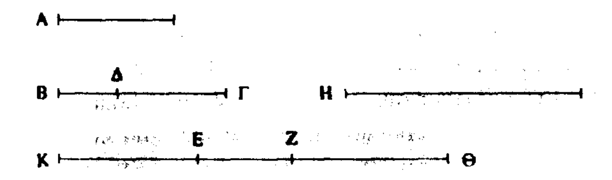
El cuadrado de una (recta) expresable, aplicado a una binomial produce como anchura una apótoma cuyos términos son conmensurables con los términos de la binomial y además guardan la misma razón y la apótoma resultante es del mismo orden que la binomial.

Sea A la (recta) expresable y ΒΓ la binomial cuyo término mayor es ΔΓ, y sea el (rectángulo comprendido) por ΒΓ, EZ igual al (cuadrado) de A.

[42] Heiberg considera esta proposición y las siguientes hasta el final del libro X una interpolación anterior a Teón.

Estas proposiciones (112-115) aparecen después de la recapitulación de los trece tipos de rectas no expresables de la clasificación general que podría ser

Digo que EZ es una apótoma cuyos términos son conmensurables con ΓΔ, ΔB y guardan la misma razón y además EZ es del mismo orden que BΓ.



Pues sea a su vez el (rectángulo comprendido) por BΔ, H igual al (cuadrado) de A. Pues bien, puesto que el (rectángulo comprendido) por BΓ, EZ es igual al (rectángulo comprendido) por BΔ, H, entonces, como ΓB es a BΔ, así H a EZ [VI 16]. Pero ΓB es mayor que BΔ; entonces H es mayor que EZ [VI 16, V 14]. Sea EΘ igual a H; entonces, como ΓB es a BΔ, así ΘE a EZ; luego, por separación, como ΓΔ es a BΔ, así ΘZ a ZE [V 17]. Y hágase de forma que como ΘZ es a ZE, así ZK a KE; entonces la (recta) entera ΘK es a la (recta) entera KZ, como ZK es a KE, porque como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes a todos los consecuentes [V 12]. Pero como ZK es a KE, así ΓΔ a ΔB [V 11]; entonces, como ΘK es a KZ, así también ΓΔ es a ΔB [id.]. Pero el (cuadrado) de ΓΔ es

---

la conclusión del libro. No tienen relación con el resto del tratamiento de los trece tipos de rectas sin razón expresable y no se usan en los libros posteriores sobre geometría de sólidos.

112-115 parecen ser el germen de un nuevo estudio sobre las rectas sin razón expresable. 115 en particular amplía el número de sus diferentes tipos. Tienen visos de ser un conjunto de teoremas antiguos que Heiberg piensa que pueden atribuirse a Apolonio, aunque no sean genuinos. Heath considera, sin embargo, que 112-114 tienen relación con las precedentes: X 111 muestra que una recta binomial no puede ser también una apótoma, mientras que X 112-114 ponen de manifiesto cómo cada una de ellas se puede usar para convertir la otra en expresable.

conmensurable con el (cuadrado) de ΔB [X 36]; luego el (cuadrado) de ΘK es también conmensurable con el (cuadrado) de KZ [VI 22; X 11]. Ahora bien, como el cuadrado de ΘK es al (cuadrado) de KZ, así ΘK a KE, puesto que las tres (rectas) ΘK, KZ, KE son proporcionales [V Def. 9]. Por tanto, ΘK es conmensurable en longitud con KE; de modo que ΘE es también conmensurable en longitud con EK [X 15]. Y puesto que el cuadrado de A es igual al (rectángulo comprendido) por EΘ, BΔ, y el cuadrado de A es expresable, entonces el (rectángulo comprendido) por EΘ, BΔ es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable BΔ; entonces EΘ es una (recta) expresable conmensurable en longitud con BΔ [X 20], de modo que EK, al ser conmensurable con ella, es también expresable y conmensurable en longitud con BΔ. Pues bien, dado que, como ΓΔ es a ΔB, así ZK a KE, mientras que ΓΔ, ΔB son conmensurables sólo en cuadrado, ZK, KE son también conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Pero KE es expresable, luego ZK es también expresable. Por tanto, ZK, KE son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Así pues, EZ es una apótoma [X 73].

Ahora bien, el cuadrado de ΓΔ es mayor que el de ΔB en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con (ΓΔ) o en el de una inconmensurable con ella.

Pues bien, si el cuadrado de ΓΔ es mayor que el de ΔB en el cuadrado de una (recta) conmensurable, también el cuadrado de ZK es mayor que el de KE en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZK) [X 14]. Y si ΓΔ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también ZK lo es [X 11 y 12], pero si lo es BΔ, también KE [X 12]; y si no lo es ninguna de las dos (rectas) ΓΔ, ΔB, tampoco (lo será) ninguna de las dos (rectas) ZK, KE.

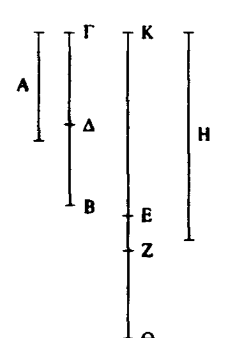
Ahora bien, si el cuadrado de ΓΔ es mayor que el de ΔB en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓΔ), también el cuadrado de ZK será mayor que el de KE en el cua-

drado de una (recta) inconmensurable con ella (ZK) [X 14]. Y si ΓΔ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también ZK lo es; pero si lo es BΔ, también KE, y si ninguna de las dos (rectas) ΓΔ, ΔB lo es, tampoco lo será ninguna de las (rectas) ZK, KE; de modo que ZE es una apótoma cuyos términos ZK, KE son conmensurables con los términos ΓΔ, ΔB de la binomial y guardan la misma razón; y (ZE) es del mismo orden que BΓ. Q. E. D.

Proposición 113

El cuadrado de una (recta) expresable, aplicado a una apótoma, produce como anchura una (recta) binomial cuyos términos son conmensurables con los términos de la apótoma y guardan la misma razón, y además la binomial resultante es del mismo orden que la apótoma.

Sea, pues, A la recta expresable y BΔ la apótoma, y sea el (rectángulo comprendido) por BΔ, KΘ igual al (cuadrado) de A, de modo que el (cuadrado) de la (recta) expresable A, aplicado a la apótoma BΔ produce la anchura KΘ.



Digo que KΘ es una binomial cuyos términos son conmensurables con los términos de BΔ y guardan la misma razón, y además KΘ es del mismo orden que BΔ.

Pues sea ΔΓ la (recta) adjunta a BΔ; entonces BΓ, ΓΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y sea el (rectángulo comprendido) por BΓ, H igual al (cuadrado) de A. Pero el (cuadrado) de A es expresable; entonces el

(rectángulo comprendido) por BΓ, H es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable BΓ; luego H es expresable y conmensurable en longitud con BΓ [X 20]. Pues bien, como el (rectángulo comprendido) por BΓ, H es igual al (rectángulo comprendido) por BΔ, KΘ, entonces, proporcionalmente, como ΓB es a BΔ, así KΘ a H [VI 16]. Pero BΓ es mayor que BΔ, entonces KΘ es mayor que H [VI 16 y V 14]. Hágase KE igual a H; entonces KE es conmensurable en longitud con BΓ. Ahora bien, dado que como ΓB es a BΔ, así ΘK a KE, entonces, por conversión, como BΓ es a ΓΔ, así KΘ a ΘE [V 19 Por.]. Hágase de forma que como KΘ es a ΘE, así ΘZ a ZE; entonces la (recta) restante KZ es a ZΘ como KΘ es a ΘE, es decir, como BΓ a ΓΔ [V 19]. Pero BΓ, ΓΔ son conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Luego también KZ, ZΘ son conmensurables sólo en cuadrado. Y dado que, como KΘ es a ΘE, KZ es a ZΘ, mientras que, como KΘ es a ΘE, ΘZ a ZE, entonces, como KZ es a ZΘ, ΘZ a ZE [V 11]; de modo que también como la primera es a la tercera, el (cuadrado) de la primera es al (cuadrado) de la segunda [V Def. 9]; luego también, como KZ es a ZE, así el (cuadrado) de KZ al (cuadrado) de ZΘ. Pero el (cuadrado) de KZ es conmensurable con el (cuadrado) de ZΘ, porque KZ, ZΘ son conmensurables en cuadrado; entonces KZ es también conmensurable en longitud con ZE [X 11]; de modo que KZ es también conmensurable en longitud con KE [X 15]. Pero KE es expresable y conmensurable en longitud con BΓ; entonces, KZ también será expresable y conmensurable en longitud con BΓ [X 12]. Y puesto que, como BΓ es a ΓΔ, así KZ a ZΘ, por alternancia, como BΓ es a KZ, así ΔΓ a ZΘ [V 16]. Pero BΓ es conmensurable con KZ; así pues, ZΘ es conmensurable en longitud con ΓΔ [X 11]. Pero BΓ, ΓΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego KZ, ZΘ son (rectas) expresables [X Def. 3] conmensurables sólo en cuadrado; por tanto KΘ es binomial.

Pues bien, si el cuadrado de BΓ es mayor que el de ΓΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (BΓ), también el (cuadrado) de KZ será mayor que el de ZΘ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (KZ) [X 14]. Y si BΓ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también KZ lo será, pero si ΓΔ es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, también ZΘ (lo será), y si ninguna de las (rectas) BΓ, ΓΔ lo es, ninguna de las (rectas) KZ, ZΘ (lo será).

Ahora bien, si el cuadrado de BΓ es mayor que el de ΓΔ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (BΓ), el (cuadrado) de KZ será también mayor que el de ZΘ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (KZ) [X 14]. Y si BΓ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, KZ también (lo será), pero si lo es ΓΔ, ZΘ también (lo será), y si ninguna de las (rectas) BΓ, ΓΔ (lo es), ninguna de las (rectas) KZ, ZΘ lo será.

Por consiguiente, KΘ es una binomial cuyos términos KZ, ZΘ son conmensurables con los términos BΓ, ΓΔ de la apótoma, y guardan la misma razón y además KΘ es del mismo orden que BΓ. Q. E. D.

Proposición 114

Si un área está comprendida por una apótoma y una binomial cuyos términos son conmensurables con los términos de la apótoma y guardan la misma razón, el lado del cuadrado equivalente al área es expresable.

Sea, pues, comprendida el área AB, ΓΔ por la apótoma AB y la binomial ΓΔ cuyo término mayor sea ΓE, y sean los términos de la binomial ΓE, EΔ conmensurables con los términos de la

apótoma AZ, ZB y guarden la misma razón, y sea H el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por AB, ΓΔ.

Digo que H es expresable.

Pues póngase la (recta) expresable Θ, y aplíquese a ΓΔ un (paralelogramo) igual al (cuadrado) de Θ produciendo la anchura KΛ; entonces KΛ es una apótoma; sean sus términos KM, MΛ conmensurables con los términos ΓE, EΔ de la binomial y guarden la misma razón [X 112]. Pero ΓE, EΔ son también conmensurables con AZ, ZB y guardan la misma razón. Entonces, como AZ es a ZB, así KM a MΛ. Luego, por alternancia, como AZ es a KM, así BZ a ΛM; por tanto, la (recta) restante AB es a la (recta) restante KΛ como AZ es a KM [V 19].

Pero AZ es conmensurable con KM [X 12]; entonces AB es también conmensurable con KΛ [X 11].

Ahora bien, como AB es a KΛ, así el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, AB al (rectángulo comprendido) por ΓΔ, KΛ [VI 1]. Luego el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, AB es conmensurable también con el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, KΛ [X 11].

Pero el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, KΛ es igual al (cuadrado) de Θ; así pues, el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, AB es conmensurable con el (cuadrado) de Θ. Pero el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, AB es igual al (cuadrado) de H; entonces el (cuadrado) de H es conmensurable con el (cuadrado) de Θ. Pero el (cuadrado) de Θ es expresable, luego el cuadrado de H es expresable. Por tanto, H es expresable. Y es el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por ΓΔ, AB.

Por consiguiente, si un área está comprendida por una apótoma y una binomial cuyos términos son conmensurables con

los términos de la apótoma y guardan la misma razón, el lado del cuadrado equivalente al área es expresable.

Porisma:

Y por eso también nos queda claro lo siguiente: que es posible que un área expresable esté comprendida por rectas no expresables. Q. E. D.

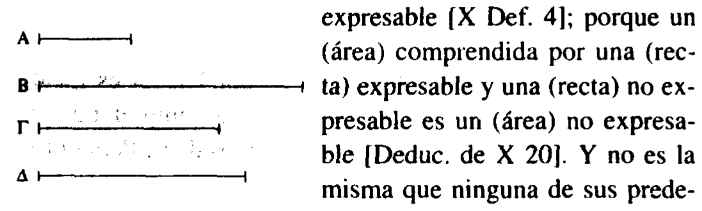
Proposición 115

A partir de una (recta) medial se produce un número infinito de (rectas) no expresables y ninguna de ellas es la misma que ninguna de sus predecesoras.

Sea, pues, A una (recta) medial.

Digo que, a partir de A se produce un número infinito de rectas no expresables y que ninguna de ellas es la misma que una de sus predecesoras.

Pues póngase la (recta) expresable B, y sea el cuadrado de Γ igual al (rectángulo comprendido) por B, A; entonces Γ no es expresable [X Def. 4]; porque un (área) comprendida por una (recta) expresable y una (recta) no expresable es un (área) no expresable [Deduc. de X 20]. Y no es la misma que ninguna de sus predecesoras porque ninguno de los cuadrados de las predecesoras aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una (recta) medial. Sea, a su vez, el (cuadrado) de Δ igual al (rectángulo comprendido) por B, Γ; entonces el (cuadrado) de Δ no es expresable [Deduc. de X 20]. Luego Δ es una (recta) no expresable [X Def. 4]; y no es la misma que ninguna de sus predecesoras, porque ninguno de los cuadrados de las predecesoras



decesoras, porque ninguno de los cuadrados de las predeceso-

ras aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura Γ. De manera semejante, entonces, avanzando en la serie *ad infinitum* queda claro que, a partir de una (recta) medial se produce un número infinito de (rectas) no expresables y ninguna es la misma que una de sus predecesoras. Q. E. D.]

LIBRO UNDÉCIMO

DEFINICIONES

1. Un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad[43].

[43] La definición de sólido es tradicional. La palabra *stereón* «sólido», es un adjetivo que, en geometría, hace referencia a *sôma*, «cuerpo», o *skhêma*, «figura».

Platón, en *Menón* 76a, «una figura es aquello que limita lo sólido», parece identificar *stéreon* con *sôma*, mientras que en Euclides se identifica con *skhêma*. En *Sofista* 235d habla de producir una imitación teniendo en cuenta las proporciones del modelo en largo, ancho y profundo. En *Leyes* 817e coloca entre los tres *mathémata* el arte de medir longitud, profundidad y anchura. Según Mugler (*Dictionaire de la terminologie geométrique des grecs, op. cit.*, pág 93) Platón se refiere a la tercera dimensión de tres formas: *báthous aúksē, trítē aúksē, ōn kýbō aúksē*. Por otra parte, la palabra *báthos* «profundidad» se aplica en Platón tanto al cuerpo sólido como a la tercera dimensión: *Rep.* 528d «después de la geometría, hablé de la astronomía que implica movimiento de un sólido *(báthous)*.

Aristóteles, por su parte, en *Metafísica* 1020a 11-14 dice: «lo continuo en una dirección es longitud, en dos direcciones anchura y en tres profundidad... longitud es una línea, anchura una superficie, profundidad un cuerpo» identificando *báthos* con *sôma*. En *Tópicos* VI 5, 142b 24 «un cuerpo es lo que tiene tres dimensiones» *(diastáseis)*. En *Metafísica* 1066b32 «lo que tiene dimensión por todas partes».

2. Y el extremo de un sólido es una superficie.
3. Una recta es ortogonal a un plano cuando forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el plano [44].
4. Un plano es ortogonal a un plano cuando las rectas trazadas en uno de los planos formando ángulos rectos con la sección común de los (dos) planos forman ángulos rectos con el plano restante.
5. Cuando desde el extremo de una recta elevado sobre un plano se traza una perpendicular al plano y se traza otra recta desde el punto que resulta hasta el extremo (que está) en el plano de la (primera) recta, el ángulo comprendido por la recta así trazada y la (que está) sobre el plano es la inclinación de la recta con respecto al plano [45].
6. La inclinación de un plano con respecto a un plano es el ángulo agudo comprendido por las (rectas) trazadas a un mismo punto formando ángulos rectos con la sección común en cada uno de los planos [46].

Herón (Def. 11) combina las dos formas de definir un sólido: «un cuerpo sólido es el que tiene longitud, anchura y profundidad o el que cuenta con las tres dimensiones».

Teón (pág. 111, 19, ed. Hiller) dice: «lo que es extensible y divisible en tres direcciones es un sólido, que tiene longitud, anchura y profundidad».

[44] Euclides establece una diferencia entre *orthé* «ortogonal», término utilizado para el caso de rectas (o planos) que forman ángulos rectos con un plano, y *prós orthás*, empleado para rectas que forman ángulos rectos con otras rectas en un plano. El término *káthetos*, «perpendicular», se utiliza de un modo más generalizado.

Herón (Def. 115) adopta esta definición y la siguiente casi con las mismas palabras.

Se establece en XI 4 el hecho de que una recta pueda relacionarse con un plano de la forma que se describe en esta definición.

[45] En suma, se trata del ángulo de la recta con su proyección en el plano.

[46] Hoy en día hablaríamos de ángulo diedro.

7. Se dice que un plano se inclina sobre un plano de manera semejante a como otro se inclina sobre otro, cuando dichos ángulos de inclinación son iguales entre sí.
8. Planos paralelos son los no concurrentes [47].
9. Figuras sólidas semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número.
10. Figuras sólidas iguales y semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número y tamaño [48].
11. Un ángulo sólido es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie con respecto a todas las líneas.

    O de otra forma: un ángulo sólido es el comprendido por más de dos ángulos planos construidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano.
12. Una pirámide es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.

[47] Herón (115) presenta la misma definición de planos paralelos. El término *asýmptōtos* «no concurrente» se ha utilizado posteriormente para las asíntotas de curvas.

[48] Simson discute la autenticidad de esta definición por dos razones:

En primer lugar, dice que no es una definición sino un teorema que debe ser probado por el método de la superposición o de alguna otra manera, por tanto no debía haberse colocado entre las definiciones. En segundo lugar, porque es falsa, según demuestra con un ejemplo (Cf. Simson, *ed. cit.*, págs. 339-41). Considera, entonces, que esta definición ha sido interpolada por Teón o algún otro editor.

Legendre comparte las objeciones de Simson y las amplía a la definición 9 (Cf. Heath, *op. cit.*, III, págs. 266-67).

Heath sin embargo piensa que las definiciones 9 y 10 se refieren únicamente a figuras compuestas por ángulos sólidos triédricos y en este caso, que es el único que Euclides tiene en cuenta, sus afirmaciones son «verdaderas y admisibles».

Herón define las figuras sólidas semejantes como aquellas que están comprendidas por planos semejantes y situados de manera semejante. En recuerdo del principio de «caridad» que Donald Davidson postula en el mundo de la interpretación, conviene entender que se refiere a poliedros convexos.

13. Un prisma es una figura sólida comprendida por planos dos de los cuales, los opuestos, son iguales, semejantes y paralelos, mientras que los demás son paralelogramos.
14. Cuando, permaneciendo fijo el diámetro de un semicírculo, se hace girar el semicírculo y se vuelve de nuevo a la misma posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es una esfera [49].
15. Y el eje de la esfera es la recta que permanece fija en torno a la que gira el semicírculo.
16. Y el centro de la esfera es el mismo que el del semicírculo.
17. Y diámetro de la esfera es cualquier recta trazada a través del centro y limitada en ambas direcciones por la superficie de la esfera.
18. Cuando, permaneciendo fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un triángulo rectángulo, se hace girar el triángulo y se vuelve de nuevo a la posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es un cono. Y si la recta que permanece fija es igual a la restante del ángulo recto, el cono será rectán-

[49] Como hace notar el escoliasta, no se trata de una definición propiamente dicha, sino de la descripción del modo de generar una esfera. Pero Euclides define de esta forma la esfera porque utilizará este modo de concebirla en las últimas proposiciones del libro XIII para probar que los vértices de los poliedros regulares tocan la superficie de las esferas que los circunscriben. De hecho, prueba que los vértices de dichas figuras tocan los semicírculos descritos sobre ciertos diámetros de las esferas.

La noción definitoria no genética de esfera es antigua. En Aristóteles, la característica propia de la esfera es que sus extremos distan lo mismo del centro (*Acerca del cielo* II, 14, 297a 24). Herón usa la misma fórmula que Euclides utiliza para definir el círculo: «Una esfera es una figura sólida limitada por una superficie tal que todas las rectas que caen en ella desde un punto interior de la figura son iguales entre sí».

gulo, y si es menor obtusángulo y si es mayor acutángulo.

19. Y el eje del cono es la recta que permanece fija en torno a la que gira el triángulo.
20. Y la base, el círculo descrito por la recta que gira.
21. Cuando, permaneciendo fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un paralelogramo rectángulo, se hace girar el paralelogramo y vuelve de nuevo a la misma posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es un cilindro.
22. Y el eje del cilindro es la recta que permanece fija en torno a la que gira el paralelogramo.
23. Y las bases son los círculos descritos por los dos lados opuestos que giran.
24. Conos y cilindros semejantes son aquellos cuyos ejes y diámetros de las bases son proporcionales.
25. Un cubo es la figura sólida comprendida por seis cuadrados iguales.
26. Un octaedro es una figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.
27. Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.
28. Un dodecaedro es la figura sólida comprendida por doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos [50].

---

[50] Con estas definiciones del libro XI entramos en el último campo temático de los *Elementos*: la geometría del espacio. El interés de los matemáticos griegos por la geometría de los sólidos («cuerpos» o «figuras») responde a diversas fuentes de inspiración y de desarrollo. Unas podrían decirse más bien «externas» —en nuestra perspectiva profesionalizada de las matemáticas que nos hace ver demarcaciones entre los miembros de esta familia (e. g. entre geometría y astronomía, entre aritmética y música), que los antiguos griegos no solían marcar—; las otras más bien «internas». Entre las fuentes «externas» cuentan ciertas ideas cosmológicas, en particular la tradición que consideraba

PROPOSICIÓN 1

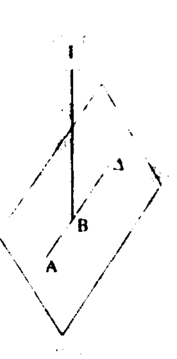
No cabe que una parte de una línea recta esté en el plano de referencia y otra parte en un plano más elevado.

Pues, si fuera posible, esté la parte AB de la línea recta ABΓ en el plano de referencia y la otra parte BΓ en un plano más elevado.

---

los sólidos regulares como encarnación o figura de los «cuerpos cósmicos». En este sentido, es elocuente la conjetura del *Timeo* de Platón acerca de las correspondencias entre los cuatro primeros sólidos y las partículas de los cuatro elementos, es decir: entre la pirámide o tetraedro y el fuego; el cubo o hexaedro y la tierra; el octaedro y el aire; el icosaedro y el agua (*Timeo*, 55e-56b); para colmo, el dodecaedro podía ser la figura del universo mismo. Una tradición neopitagórica, de la que se hace eco AECIO (*Placita*, II 6, 5), atribuye a Pitágoras tanto el conocimiento de los cinco poliedros como su asociación a los elementos y al conjunto del cosmos —raro poder de presciencia el de este Pitágoras, capaz de conocer cosas para las que aún no existen condiciones de conocimiento (e. g. la investigación sobre inconmensurables que subyace en la construcción de los poliedros, en particular del dodecaedro; la «teoría de los elementos» de Empédocles)—. El escolio 1.° del libro XIII pretende, a su vez, que la pirámide, el cubo y el dodecaedro ya habían atraído la atención de los pitagóricos, mientras que el octaedro y el icosaedro habían sido estudiados por Teeteto. Es una pretensión más sensata, pero ambigua, al menos en la medida en que pasa por alto la diferencia entre el hallazgo o el interés por ciertas figuras y la construcción geométrica de los poliedros sobre la base teórica pertinente. En este sentido, fueran cuales fueran los motivos filosóficos o estéticos pitagóricos, la conversión de los poliedros regulares en un asunto geométrico parece deberse sobre todo al trabajo de matemáticos como Teeteto —a quien, por cierto, *Suda* atribuye un escrito sobre estos cinco sólidos (edic. Ginebra, 1619; I 1295, 1-5)—. También revisten especial importancia los planteamientos astronómicos, asociados a modelos cosmológicos, que guiaban el estudio de la geometría esférica. Un hito preeuclídeo singular en esta línea es *La esfera en movimiento* de Autólico de Pitania, el primer tratado matemático-científico griego que hoy se conserva (cf. edic. G. AUJAC, París, 1979). Entre las fuentes

Entonces habrá en el plano de referencia una recta que continúe a AB; sea BΔ, entonces AB es un segmento común de las dos rectas ABΓ, ABΔ; lo cual es imposible teniendo en cuenta que, si describiéramos un círculo con el centro B y la distancia AB, los diámetros cortarían circunferencias desiguales del círculo.



Por consiguiente, no cabe que una parte de una línea recta esté en el plano de referencia y otra parte en el plano más elevado. Q. E. D.[51].

---

o motivos más «internos» cabe mencionar la investigación de medias proporcionales (cf. *Timeo*, 31c-32b), al calor de antiguos problemas como el de la duplicación del cubo; el análisis de magnitudes no expresables racionalmente emprendido por Teeteto y desarrollado en el libro X; los estudios sobre sólidos, como los resultados de Demócrito y de Eudoxo que recuerda Arquímedes y se hallan reflejados en el libro XII (e. g., en las proposiciones 2, 7, 10, 18).

El planteamiento de Euclides es una muestra elocuente no sólo de la madurez de esta tradición clásica de la geometría griega (la tradición Teeteto-Eudoxo), sino de las limitaciones de la matemática griega a la hora de explicitar ciertos supuestos. Euclides, por ejemplo, tiende a pasar del modo más tácito y natural desde los resultados acerca de un plano hasta la solución de problemas que envuelven más de un plano: la geometría de los sólidos no parece requerir ni postulados específicos, ni la explicitación de su relación con la anterior geometría plana. En consecuencia, no aparecen especificadas en los *Elementos* las relaciones entre planos y puntos, planos y líneas, planos y planos. Pero la limitación más sustancial es la de una geometría del espacio que carece de una noción propia y expresa de espacio geométrico —en curioso contraste con la preocupación del pensamiento griego por el espacio cosmológico o por el lugar físico, cf. «Introducción general», *Elementos. Libros I-IV*, págs. 97, 108-110. Por lo demás, esa carencia del debido nivel de abstracción conceptual mal puede suplirse con la mera indicación del carácter tridimensional de las figuras que se van a tratar en este nuevo campo temático.

[51] «Plano de referencia» recoge los dos sentidos posibles del griego *tò hypokeiménon epípedon:* a) el plano que está debajo con respecto a otro más elevado *meteōróteron*, y b) el plano dado o acordado.

Por otra parte, Heath (*op. cit.*, pág. 272) hace notar que las pruebas de las

PROPOSICIÓN 2

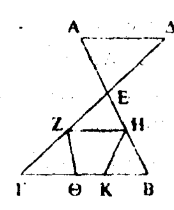
Si dos rectas se cortan una a otra están en un plano, y todo triángulo está en un plano.

Córtense, pues, las dos rectas AB, ΓΔ en el punto E.

Digo que AB, ΓΔ están en un plano y todo triángulo está en un plano.

Pues tómense al azar los puntos Z, H en EΓ, EB y trácense ΓB, ZH, y trácense entre ellas ZΘ, HK.

Digo en primer lugar que el triángulo EΓB está en un plano. Pues si una parte del triángulo EΓB, sea ZΘΓ o sea HBK, está en el plano de referencia y la (parte) restante en otro (plano), una parte de una de las rectas EΓ, EB estará también en el plano de referencia y otra (parte) en otro. Pero si la parte ZΓBH del triángulo EΓB está en el (plano) de referencia y la restante en otro, una parte de ambas rectas EΓ, EB estará también en el plano de referencia y otra (parte) en



tres primeras proposiciones del libro XI son insatisfactorias. Buena señal es que Euclides no es capaz de hacer ningún uso de su definición de plano para éstas. En realidad se basa en supuestos sobre planos que debería haber declarado de modo análogo a como había adelantado postulados sobre rectas en el libro I. Algunos de estos postulados tácitos podrían formularse como sigue:

XI 1* Si dos puntos están en un plano también lo está la recta que pasa a través de ellos.

2* Tres puntos cualesquiera que no estén en línea recta determinan un plano.

3* Si dos planos se cortan, lo hacen en una recta.

4* Para todo plano hay un punto que no está en él. (El propósito general de este supuesto es generar nuevos planos.)

Para más detalles, cf. MUELLER, *Philosophy of Mathematics...*, *op. cit.*, págs. 208 ss.

otro; lo que precisamente se ha demostrado que es absurdo [XI 1]. Por tanto, el triángulo ΕΓΒ está en un plano. Pero en el (plano) en que está el triángulo ΕΓΒ, en ese está también cada una de las rectas ΕΓ, ΕΒ; y en el plano en que está cada una de las rectas ΕΓ, ΕΒ, en ese están también ΑΒ, ΓΔ [XI 1].

Por consiguiente, las rectas ΑΒ, ΓΔ están en un plano y todo triángulo está en un plano. Q. E. D.[52].

Proposición 3

Si dos planos se cortan uno a otro su sección común es una recta.

Córtense, pues, los dos planos ΑΒ, ΒΓ y sea la línea ΔΒ su sección común.

Digo que la línea ΔΒ es una recta.

Pues, si no, trácese de Δ a Β en el plano ΑΒ, la recta ΔΕΒ, y en el plano ΒΓ la recta ΔΖΒ.

Entonces las dos rectas ΔΕΒ, ΔΖΒ tendrán los mismos extremos y evidentemente encerrarán un área; lo cual es absurdo. Entonces, ΔΕΒ, ΔΖΒ no son rectas. De manera semejante demostraríamos que no habrá ninguna otra (recta) trazada de Δ a Β excepto ΔΒ, la sección común de los planos ΑΒ, ΒΓ.

[52] Es discutible el valor de la prueba de esta proposición dado que Euclides sólo considera ciertos triángulos y ciertos cuadriláteros que forman parte del triángulo inicial. Simson (*op. cit.*, pág. 193) enuncia el teorema como sigue: «Si dos rectas se cortan una a otra, estarán en un plano; y tres rectas cualesquiera, que se encuentran mutuamente, están en un plano».

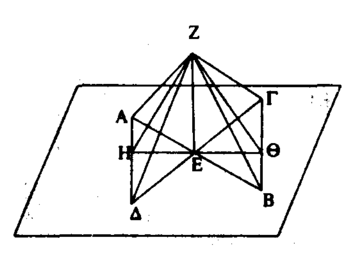
Por consiguiente, si dos planos se cortan uno a otro, su sección común es una recta. Q. E. D.[53].

PROPOSICIÓN 4

Si se levanta una recta formando ángulos rectos con dos rectas que se cortan una a otra en su sección común, formará también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ellas.

Levántese, pues, una recta EZ formando ángulos rectos a partir del punto E con dos rectas AB, ΓΔ que se cortan en el punto E.

Digo que EZ forma también ángulos rectos con el plano (que pasa) a través de AB, ΓΔ.



Pues tómense las (rectas) AE, EB, ΓE, EΔ iguales entre sí y trácese una recta al azar, HEΘ, por el punto E, y trácense AΔ, ΓB, y además, desde un punto al azar, Z, (de la recta EZ), trácense ZA, ZH, ZΔ, ZΓ, ZΘ, ZB. Ahora bien, como las dos (rectas) AE, EΔ son iguales a las dos (rectas) ΓE, EB y comprenden ángulos iguales [I 15], entonces la base AΔ es igual a la base ΓB, y el triángulo AEΔ será igual al triángulo ΓEB [I 4]; de modo que el ángulo ΔAE es igual al ángulo EBΓ. Pero el ángulo AEH es también igual al (ángulo) BEΘ [I 15]. Así pues AHE, BEΘ

[53] SIMSON suprime el pasaje «entonces ΔEB, ΔZB no son rectas. De manera semejante demostraríamos que no habrá ninguna otra (recta) trazada de Δ a B excepto ΔB, la sección común de los planos AB, BΓ», por considerarlo superfluo. Cf. *op. cit.*, pág. 346.

son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente y un lado igual a un lado, el que corresponde a los ángulos iguales, esto es: el (lado) AE al (lado) EB; luego tendrá también los lados restantes iguales a los lados restantes [I 26]. Por tanto, HE es igual a EΘ y AH a BΘ. Y como AE es igual a EB, mientras que ZE es común y forma ángulos rectos, entonces, la base ZA es igual a la base ZB [I 4]. Por lo mismo, ZΓ también es igual a ZΔ. Ahora bien, como AΔ es igual a ΓB, y ZA es igual a ZB, entonces, los dos (lados) ZA, AΔ son iguales respectivamente a los dos (lados) ZB, BΓ; pero se ha demostrado que también la base ZΔ es igual a la base ZΓ; luego el ángulo ZAΔ es igual al ángulo ZBΓ [I 8]. Y puesto que se ha demostrado que AH es a su vez igual a BΘ, mientras que ZA es también igual a ZB, entonces los dos (lados) ZA, AH son iguales a los dos (lados) ZB, BΘ. Y se ha demostrado que el (ángulo) ZAH es también igual al (ángulo) ZBΘ; así pues, la base ZH es igual a la base ZΘ [I 4]. Ahora bien, puesto que se ha demostrado que HE es a su vez igual a EΘ y EZ es común, entonces los dos (lados) HE, EZ son iguales a los dos (lados) ΘE, EZ; y la base ZH es igual a la base ZΘ; entonces el ángulo HEZ es igual al ángulo ΘEZ [I 8]. Luego cada uno de los ángulos HEZ, ΘEZ es recto. Por tanto, ZE forma ángulos rectos con HΘ trazada al azar por el punto E.

De manera semejante demostraríamos que ZE forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el plano de referencia. Pero una recta es ortogonal a un plano cuando forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el mismo plano [XI Def. 3]. Luego ZE forma ángulos rectos con el plano de referencia. Y el plano de referencia es el (que pasa) a través de las (rectas) AB, ΓΔ. Por tanto ZE forma ángulos rectos con el plano (que pasa) a través de las (rectas) AB, ΓΔ.

Por consiguiente, si se levanta una recta formando ángulos rectos con dos rectas que se cortan, en su sección común, for-

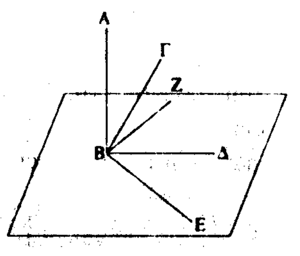
mará también ángulos rectos con el plano (que pasa) a través de ellas. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 5

Si se levanta una recta formando ángulos rectos con tres rectas que se tocan, en su sección común, las tres rectas están en un plano.

Levántese, pues, una recta AB formando ángulos rectos con tres rectas BΓ, BΔ, BE, en su punto de contacto, B.

Digo que BΓ, BΔ, BE están en un plano.



Pues, supongamos que no, y si fuera posible, estén BΔ, BE en el plano de referencia y BΓ en uno más elevado, prolónguese el plano que pasa a través de AB, BΓ; entonces producirá una recta como sección común en el plano de referencia [XI 3]. Produzca la (recta) BZ. Así pues, las tres rectas AB, BΓ, BZ están en un plano, el trazado a través de las (rectas) AB, BΓ. Y puesto que AB forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) BΔ, BE, entonces AB es ortogonal también al plano que pasa a través de BΔ, BE [XI 4]. Y el plano (que pasa) a través de BΔ, BE es el de referencia; luego AB es ortogonal al plano de referencia. De modo que AB hará ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]. Pero BZ la toca y está en el plano de referencia; entonces el ángulo ABZ es recto. Y se ha supuesto que el ángulo ABΓ también es recto; luego el ángulo ABZ es igual al ángulo ABΓ. Y están en un plano: lo cual es

imposible. Luego la recta ΒΓ no está en un plano más elevado; por tanto, las tres rectas ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ están en un plano.

Por consiguiente, si se levanta una recta formando ángulos rectos con tres rectas que se tocan, en su punto de contacto, las tres rectas están en un plano. Q. E. D.

Proposición 6

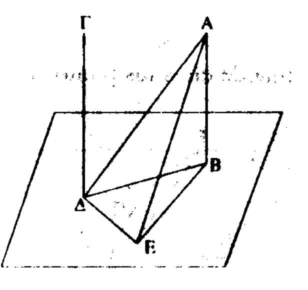
Si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas serán paralelas.

Formen, pues, las dos rectas ΑΒ, ΓΔ ángulos rectos con el plano de referencia.

Digo que ΑΒ es paralela a ΓΔ.

Pues únanse con el plano de referencia en los puntos Β, Δ y trácese la recta ΒΔ, y trácese ΔΕ formando ángulos rectos con ΒΔ en el plano de referencia, y hágase ΔΕ igual a ΑΒ, y trácense ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Ahora bien, como ΑΒ es ortogonal al plano de referencia, hará ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]. Pero cada una de las rectas ΒΔ, ΒΕ, que están en el plano de referencia, toca a ΑΒ; entonces cada uno de los ángulos ΑΒΔ, ΑΒΕ es recto. Por lo mismo, cada uno de los (ángulos) ΓΔΒ, ΓΔΕ también es recto. Y como ΑΒ es igual a ΔΕ y ΒΔ es común, entonces los dos (lados) ΑΒ, ΒΔ son iguales a los dos (lados) ΕΔ, ΔΒ; y comprenden ángulos rectos; luego la base ΑΔ es igual a la base ΒΕ [I 4]. Ahora bien, como ΑΒ es igual a ΔΕ, mientras que ΑΔ es también igual a



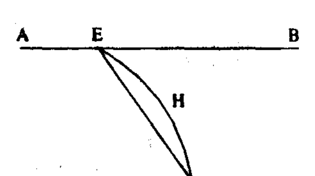
BE, entonces los dos (lados) AB, BE son iguales a los dos (lados) EΔ, ΔA; y AE es su base común; luego el ángulo ABE es igual al ángulo EΔA [I 8]. Pero el (ángulo) ABE es recto; entonces el (ángulo) EΔA es también recto; luego EΔ forma ángulo recto con ΔA. Pero forma también ángulos rectos con cada una de las (rectas) BΔ, ΔΓ. Entonces EΔ se ha levantado formando ángulos rectos con las tres rectas BΔ, ΔA, ΔΓ, en su punto de contacto; luego las tres rectas BΔ, ΔA, ΔΓ están en un plano [XI 5]. Pero en el plano en que están ΔB, ΔA, en ése está también AB: porque todo triángulo está en un plano [XI 2]; entonces las rectas AB, BΔ, ΔΓ están en un plano. Ahora bien, cada uno de los ángulos ABΔ, BΔΓ es recto; por tanto, AB es paralela a ΓΔ [I 28].

Por consiguiente, si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas serán paralelas. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 7

Si dos rectas son paralelas y se toman unos puntos al azar en cada una de ellas, la recta que une los puntos está en el mismo plano que las paralelas.

Sean AB, ΓΔ dos rectas paralelas y tómense al azar en cada una de ellas los puntos E, Z respectivamente.



Digo que la recta que une los puntos E, Z está en el mismo plano que las paralelas.

Pues supongamos que no, y si fuera posible, esté en un plano más elevado como EHZ, y trácese un plano que pase a través de EHZ, entonces producirá una recta como sección en el plano de referencia [XI 3]. Prodúzcala como la (recta) EZ; entonces las dos

rectas EHZ, EZ encerrarán un espacio; lo cual es imposible; luego la recta trazada de E a Z no está en un plano más elevado; por tanto, la recta trazada de E a Z está en el plano que pasa a través de las paralelas AB, ΓΔ.

Por consiguiente, si dos rectas son paralelas y se toman unos puntos al azar en cada una de ellas, la recta que une los puntos está en el mismo plano que las paralelas. Q. E. D.

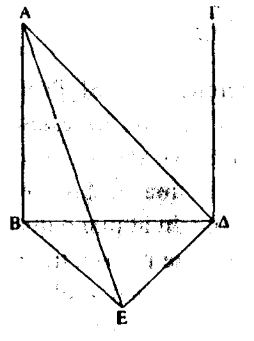
Proposición 8

Si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano cualquiera, la restante formará también ángulos rectos con el mismo plano.

Sean AB, ΓΔ dos rectas paralelas y una de ellas, AB, forme ángulos rectos con el plano de referencia.

Digo que la restante, ΓΔ, formará también ángulos rectos con el mismo plano.

Pues únanse AB, ΓΔ con el plano de referencia en los puntos B, Δ, y trácese BΔ; entonces AB, ΓΔ, BΔ están en un plano [XI 7]. Trácese ΔE formando ángulos rectos con BΔ en el plano de referencia y hágase ΔE igual a AB, y trácense BE, AE, AΔ. Y puesto que AB es ortogonal al plano de referencia, entonces AB forma ángulos rectos también con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]; luego cada uno de los ángulos ABΔ, ABE es recto. Y puesto que la recta BΔ ha incidido sobre las paralelas AB, ΓΔ, entonces los ángulos ABΔ, ΓΔB son iguales a dos rectos [I 29]. Pero el ángulo



ΑΒΔ es recto; entonces el ángulo ΓΔΒ es también recto; luego ΓΔ forma ángulos rectos con ΒΔ. Y como ΑΒ es igual a ΔΕ, y ΒΔ es común, entonces los dos lados ΑΒ, ΒΔ son iguales a los dos (lados) ΕΔ, ΔΒ; y el ángulo ΑΒΔ es igual al ángulo ΕΔΒ: porque cada uno de ellos es recto; luego la base ΑΔ es igual a la base ΒΕ. Y como ΑΒ es igual a ΔΕ, y ΒΕ a ΑΔ, entonces los dos (lados) ΑΒ, ΒΕ son iguales respectivamente a los dos (lados) ΕΔ, ΔΑ. Y ΑΕ es su base común; luego el ángulo ΑΒΕ es igual al ángulo ΕΔΑ. Pero el ángulo ΑΒΕ es recto; entonces el ángulo ΕΔΑ es también recto; así pues, ΕΔ forma ángulos rectos con ΑΔ. Pero forma ángulos rectos también con ΔΒ; luego ΕΔ forma también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΒΔ, ΔΑ [XI 4]. Entonces ΕΔ producirá ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano ΒΔΑ. Pero ΔΓ está en el plano que pasa a través de ΒΔΑ, teniendo en cuenta que ΑΒ, ΒΔ están en el plano que pasa a través de ΒΔΑ [XI 2], y ΔΓ está también en el plano en el que están ΑΒ, ΒΔ. Entonces ΕΔ forma ángulos rectos con ΔΓ; de modo que ΓΔ también forma ángulos rectos con ΔΕ. Pero ΓΔ forma también ángulos rectos con ΒΔ. Luego ΓΔ está puesta formando ángulos rectos desde el punto de sección, Δ, con las dos rectas ΔΕ, ΔΒ que se cortan entre sí; de modo que ΓΔ forma también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΔΕ, ΔΒ [XI 4]. Pero el plano que pasa a través de ΔΕ, ΔΒ es el de referencia; luego ΓΔ forma ángulos rectos con el plano de referencia.

Por consiguiente, si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano cualquiera, la restante formará también ángulos rectos con el mismo plano. Q. E. D.

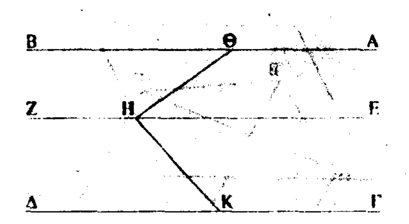
PROPOSICIÓN 9

Las paralelas a una misma recta y que no están en el mismo plano que ella son también paralelas entre sí.

Sean, pues, cada una de las rectas AB, ΓΔ paralelas a EZ, sin estar en el mismo plano que ella.

Digo que AB es paralela a ΓΔ.

Pues tómese al azar el punto H en la recta EZ, y trácese desde él la (recta) HΘ formando ángulos rectos con EZ en el plano que pasa a través de EZ, AB y trácese HK formando a su vez ángulos rectos con EZ en el plano que pasa a través de ZE, ΓΔ. Ahora bien, como EZ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) HΘ, HK, entonces EZ forma ángulos rectos tam-



bién con el plano que pasa a través de HΘ, HK [XI 4]. Y EZ es paralela a AB, luego también AB forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΘHK [XI 8]. Por lo mismo ΓΔ también forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΘHK; entonces cada una de las (rectas) AB, ΓΔ forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΘHK. Pero si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas son paralelas [XI 6].

Por consiguiente, AB es paralela a ΓΔ. Q. E. D.

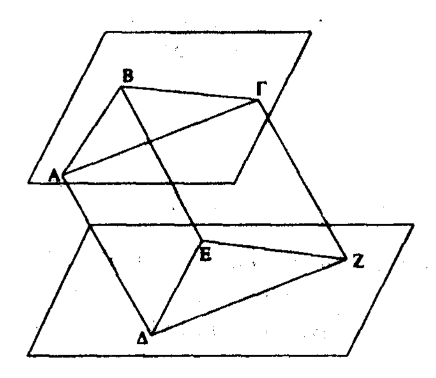
PROPOSICIÓN 10

Si dos rectas que se tocan son paralelas a otras dos rectas que se tocan, sin estar en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales.

Sean AB, BΓ dos rectas que se tocan, paralelas a las dos rectas que se tocan ΔE, EZ, sin estar en el mismo plano.

Digo que el ángulo ABΓ es igual al (ángulo) ΔEZ.

Tómense, pues, las (rectas) BA, BΓ, EΔ, EZ iguales entre sí, y trácense AΔ, ΓZ, BE, AΓ, ΔZ. Y como BA es igual y paralela a EΔ, entonces AΔ también es igual y paralela a BE [I 33]. Por lo mismo, ΓZ también es igual y paralela a BE; entonces cada una



de las (rectas) AΔ, ΓZ es igual y paralela a BE. Pero las paralelas a una misma recta y que no están en el mismo plano que ella son también paralelas entre sí [XI 9]. Entonces AΔ es igual y paralela a ΓZ. Y AΓ, ΔZ las unen; luego AΔ es paralela a ΔZ [I 33]. Y como los dos (lados) AB, BΓ son iguales a los dos (lados) ΔE, EZ y la base AΓ es igual a la base ΔZ, entonces el ángulo ABΓ es igual al ángulo ΔEZ.

Por consiguiente, si dos rectas que se tocan son paralelas a otras dos rectas que se tocan, sin estar en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales. Q. E. D.

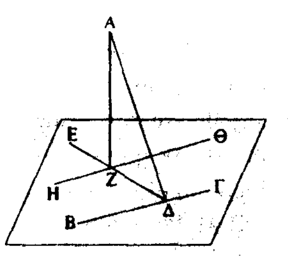
PROPOSICIÓN 11

Trazar una línea recta perpendicular a un plano dado desde un punto elevado dado.

Sea A el punto elevado dado y sea el plano de referencia el plano dado.

Así pues, hay que trazar una línea recta perpendicular al plano de referencia desde el punto A.

Trácese, pues, al azar, una recta BΓ en el plano de referencia, y trácese, desde el punto A, la (recta) AΔ perpendicular a BΓ [I 12]. Pues bien, si AΔ es perpendicular también al plano de referencia, habría resultado lo propuesto. Pero si no, trácese, desde el punto Δ, la (recta) ΔE formando ángulos rectos con BΓ en el plano de referencia [I 11] y desde A, la (recta) AZ perpendicular a AE [I 12], y por el punto Z, trácese HΘ paralela a BΓ [I 31].



Ahora bien, como BΓ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) ΔA, ΔE, entonces BΓ forma ángulos rectos también con el plano que pasa a través de EΔA [XI 4]. Y HΘ es paralela a ella. Pero si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano, la restante formará también ángulos rectos con el mismo plano [XI 8]; luego HΘ forma también ángulos rectos con el plano que pasa a través de EΔ, ΔA. Por tanto, HΘ forma ángulos rectos con

todas las rectas que la tocan y están en el plano que pasa a través de EΔ, ΔA [XI Def. 3]. Pero AZ que está en el plano que pasa a través de EΔ, ΔA la toca; luego HΘ forma ángulos rectos con ZA. De modo que también ZA forma ángulos rectos con ΘH. Pero AZ forma ángulos rectos con ΔE; entonces AZ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) HΘ, ΔE. Ahora bien, si se levanta una recta formando ángulos rectos con dos rectas que se cortan, en su punto de sección, formará también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ellas [XI 4]. Luego ZA forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de EΔ, HΘ. Pero el plano que pasa a través de EΔ, HΘ es el plano de referencia; por tanto, AZ forma ángulos rectos con el plano de referencia.

Por consiguiente, se ha trazado la línea recta AZ perpendicular al plano de referencia, desde el punto elevado dado, A. Q. E. F.

Proposición 12

Levantar una línea recta formando ángulos rectos con un plano dado desde un punto dado en él.

Sea el plano de referencia el plano dado y A el punto en él. Así pues hay que levantar una línea recta formando ángulos rectos con el plano de referencia desde el punto A.

Considérese un punto elevado cualquiera B y trácese desde el punto B, BΓ perpendicular al plano de referencia [XI 11], y por el punto A trácese AΔ paralela a BΓ [I 31].

Pues bien, como AΔ, ΓB son dos

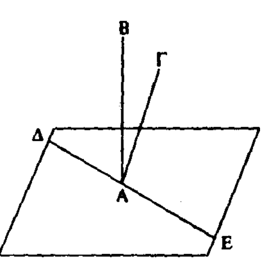
rectas paralelas y una de ellas, BΓ, forma ángulos rectos con el plano de referencia, entonces la restante AΔ forma también ángulos rectos con el plano de referencia [XI 8].

Por consiguiente, se ha levantado la (recta) AΔ formando ángulos rectos con el plano dado en su punto A. Q. E. F.

Proposición 13

No podrán levantarse por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos con el mismo plano desde el mismo punto.

Pues, si fuera posible, levántense por el mismo lado las dos rectas AB, AΓ formando ángulos rectos con el plano de referencia, desde el mismo punto A, y trácese el plano que pasa a través de BA, AΓ; entonces producirá una recta como sección, a través del punto A, en el plano de referencia [XI 3]. Produzca la (recta) ΔAE; entonces las rectas AB, AΓ, ΔAE están en un plano. Y como ΓA forma ángulos rectos con el plano de referencia, entonces hará ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]. Pero ΔAE, que



está en el plano de referencia, la toca; luego el ángulo ΓAE es recto. Por lo mismo, el ángulo BAE es también recto; luego el (ángulo) ΓAE es igual al (ángulo) BAE. Y están en un plano; lo cual es imposible.

Por consiguiente, no se levantarán por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos con el mismo plano desde el mismo punto. Q. E. D.

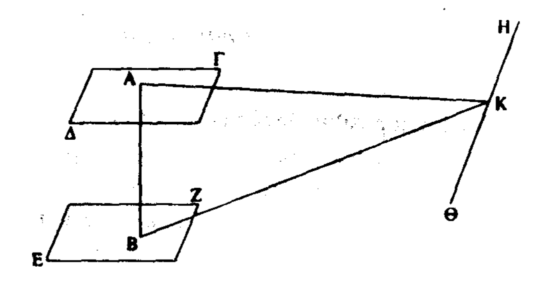
PROPOSICIÓN 14

Los planos con los que una misma recta forma ángulos rectos serán paralelos.

Forme, pues, ángulos rectos una recta cualquiera, AB, con cada uno de los planos ΓΔ, EZ.

Digo que los planos son paralelos.

Pues si no, se encontrarán al prolongarse. Encuéntrense; entonces producirán una recta como sección común [XI 3].



Produzcan la (recta) HΘ, y tómese al azar el punto K en la (recta) HΘ y trácense AK, BK. Y como AB forma ángulos rectos con el plano EZ, entonces AB forma ángulos rectos con la recta BK que está en la prolongación del plano EZ [XI Def. 3]; luego el ángulo ABK es recto. Por lo mismo el ángulo BAK también es recto. Entonces los dos ángulos ABK, BAK del triángulo ABK son iguales a dos rectos; lo cual es imposible [I 17]; luego los planos ΓΔ, EZ prolongados no se encontrarán; por tanto los planos ΓΔ, EZ son paralelos.

Por consiguiente, los planos con los que la misma recta forma ángulos rectos serán planos paralelos. Q. E. D.

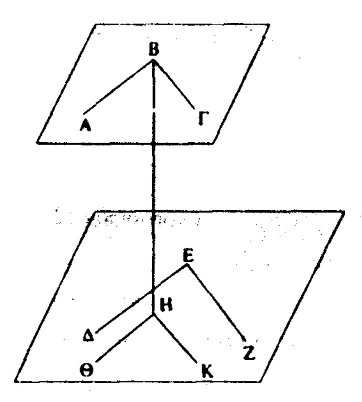
PROPOSICIÓN 15

Si dos rectas que se tocan son paralelas a dos rectas que se tocan sin estar en el mismo plano, los planos que pasan a través de ellas son paralelos.

Pues sean las rectas que se tocan AB, BΓ paralelas a las dos rectas que se tocan ΔE, EZ sin estar en el mismo plano.

Digo que los planos que pasan a través de AB, BΓ, ΔE, EZ, prolongados, no se encontrarán.

Trácese, pues, desde el punto B, BH perpendicular al plano que pasa a través de ΔE, EZ [XI 11], y únase con el plano en el punto H; trácese, por el punto H, la (recta) HΘ paralela a EΔ y la



(recta) HK (paralela) a EZ [I 31]. Y como BH forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΔE, EZ, entonces hará ángulos rectos con todas las rectas que la toquen y estén en el plano que pasa a través de ΔE, EZ [XI Def. 3]. Pero cada una de las rectas HΘ, HK que están en el plano que pasa a través de ΔE, EZ la tocan; luego cada uno de los ángulos BHΘ, BHK es recto. Y como BA es paralela a HΘ [XI 9], entonces los ángulos HBA,

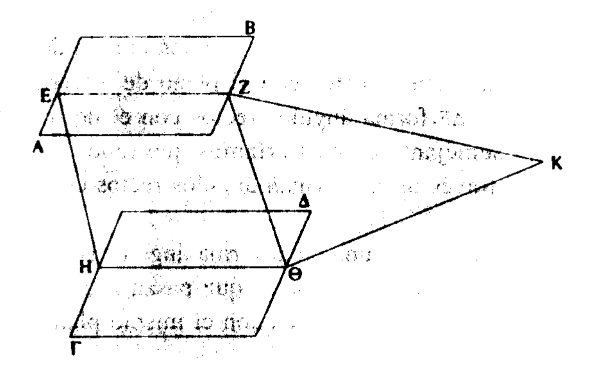
BHΘ son iguales a dos rectos [I 29]. Pero el (ángulo) BHΘ es recto; entonces el (ángulo) HBA es también recto; luego HB forma ángulos rectos con BA. Por lo mismo HB forma también ángulos rectos con BΓ. Pues bien, como la recta HB se ha levantado formando ángulos rectos con las dos rectas que se cortan BA, BΓ, entonces HB forma también ángulos rectos con el plano que pasa a través de BA, BΓ [XI 4]. Pero los planos con los que una misma recta forma ángulos rectos son planos paralelos [XI 14]; luego el plano que pasa a través de AB, BΓ es paralelo al plano que pasa a través de ΔE, EZ.

Por consiguiente, si dos rectas que se tocan son paralelas a dos rectas que se tocan sin estar en el mismo plano, los planos que pasan a través de ellas son paralelos. Q. E. D.

Proposición 16

Si dos planos paralelos son cortados por un plano, las secciones comunes son paralelas.

Sean cortados, pues, los dos planos paralelos AB, ΓΔ por el plano EZHΘ, y sean sus secciones comunes EZ, HΘ.



Digo que EZ es paralela a HΘ.

Pues, si no, EZ, HΘ se encontrarán si se prolongan en la dirección de Z, Θ o en la dirección de E, H. Prolónguense en la dirección de Z, Θ y encuéntrense, en primer lugar en el (punto) K. Ahora bien, como EZK están en el plano AB, entonces todos los puntos de la (recta) EZK están en el plano AB [X 1]. Pero K es uno de los puntos de la recta EZK, luego K está en el plano AB. Por lo mismo, entonces K está también en el plano ΓΔ; por tanto los planos AB, ΓΔ, si se prolongan, se encontrarán. Pero no se encuentran porque se ha supuesto que son paralelos; entonces las rectas EZ, HΘ no se encontrarán si se prolongan en la dirección de Z, Θ. De manera semejante demostraríamos que las rectas EZ, HΘ tampoco se encontrarán si se prolongan en la dirección de E, H. Pero las (rectas) que no se encuentran en ninguna de las dos direcciones son paralelas. Luego EZ es paralela a HΘ.

Por consiguiente, si dos planos paralelos son cortados por un plano, las secciones comunes son paralelas. Q. E. D.

Proposición 17

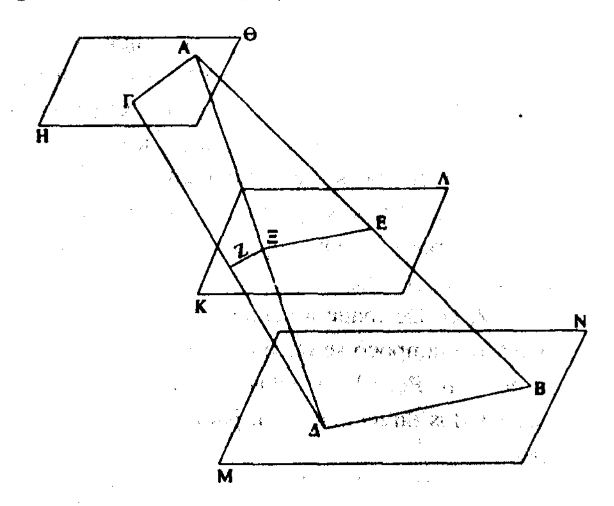
Si dos rectas son cortadas por planos paralelos, serán cortadas en las mismas razones.

Sean cortadas, pues, las dos rectas AB, ΓΔ por los planos paralelos HΘ, KΛ, MN, en los puntos A, E, B, Γ, Z, Δ.

Digo que, como la recta AE es a la recta EB, así ΓZ a ZΔ.

Trácense, pues, las (rectas) AΓ, BΔ, AΔ y únase AΔ con el plano KΛ en el punto Ξ y trácense EΞ, ΞZ. Y como los dos planos paralelos KΛ, MN son cortados por el plano EBΔΞ, sus secciones comunes EΞ, BΔ son paralelas [XI 16]. Por lo mismo, como los dos planos HΘ, KΛ son cortados por el plano AΞZΓ,

sus secciones comunes ΑΓ, ΞΖ son paralelas [id.]. Y puesto que se ha trazado la recta ΕΞ paralela a la ΒΔ, uno de los lados del triángulo ΑΒΔ, entonces, proporcionalmente, como ΑΕ es a ΕΒ,



así ΑΞ a ΞΔ [VI 2]. Y puesto que se ha trazado a su vez la recta ΞΖ paralela a ΑΓ, uno de los lados del triángulo ΑΔΓ, entonces, proporcionalmente, como ΑΞ es a ΞΔ, así ΓΖ a ΖΔ [id.]. Pero se ha demostrado también que como ΑΞ es a ΞΔ, así ΑΕ a ΕΒ; luego, como ΑΕ es a ΕΒ, así ΓΖ a ΖΔ [V 11].

Por consiguiente, si dos rectas son cortadas por planos paralelos, serán cortadas en la misma razón. Q. E. D.

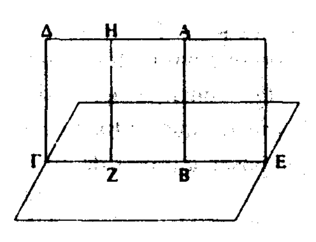
Proposición 18

Si una recta forma ángulos rectos con un plano cualquiera, todos los planos que pasen a través de ella formarán también ángulos rectos con el mismo plano.

Pues forme ángulos rectos una recta cualquiera, AB, con el plano de referencia.

Digo que todos los planos que pasan a través de AB forman también ángulos rectos con el plano de referencia.

Trácese, pues, el plano ΔE a través de AB y sea ΓE la sección común del plano ΔE y el de referencia; tómese al azar el punto Z en ΓE, y trácese, desde el punto Z, la (recta) ZH formando ángulos rectos con ΓE en el plano ΔE [I 11]. Ahora bien, como AB es ortogonal al plano de referencia, entonces AB formará también ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]; de modo que también forma ángulos rectos con ΓE; luego el ángulo ABZ es recto.



Pero el (ángulo) HZB es también recto; luego AB es paralela a ZH [I 28]. Pero AB forma ángulos rectos con el plano de referencia; entonces ZH forma también ángulos rectos con el plano de referencia [XI 8]. Ahora bien, un plano es ortogonal a un plano cuando las rectas trazadas en uno de los planos formando ángulos rectos con la sección común de los (dos) planos forman ángulos rectos con el plano restante [XI Def. 4]. Y se ha demostrado que la (recta) ZH, trazada en uno de los planos ΔE, formando ángulos rectos con la sección común de los planos ΓE, forma ángulos rectos con el plano de referencia; por tanto, el plano ΔE forma ángulos rectos con el de referencia. De manera semejante demostraríamos que todos los planos que pasan a través de AB forman ángulos rectos con el plano de referencia.

Por consiguiente, si una recta forma ángulos rectos con un plano cualquiera, todos los planos que pasan a través de ella formarán también ángulos rectos con el mismo plano. Q. E. D.

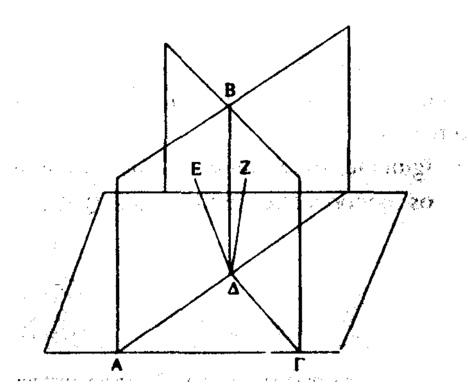
PROPOSICIÓN 19

Si dos planos que se cortan forman ángulos rectos con un plano, su sección común formará también ángulos rectos con el mismo plano.

Pues formen los dos planos AB, BΓ ángulos rectos con el plano de referencia, y sea BΔ su sección común.

Digo que BΔ forma ángulos rectos con el plano de referencia.

Pues supongamos que no, y trácese desde el punto Δ la (recta) ΔE en el plano AB formando ángulos rectos con la (recta) AΔ y la (recta) ΔZ en el plano BΓ formando ángulos rectos con ΓΔ. Y como el plano AB es ortogonal al plano de referencia, y se ha trazado ΔE en el plano AB formando ángulos rectos



con su sección común, AΔ, entonces ΔE es ortogonal al plano de referencia [XI Def. 4]. De manera semejante demostraríamos que ΔZ es también ortogonal al plano de referencia. Entonces se han levantado dos rectas formando ángulos rectos con el plano de referencia desde el mismo punto, Δ, por el mis-

mo lado; lo cual es imposible [XI 13]. Luego no se levantará (otra recta) desde el punto Δ formando ángulos rectos con el plano de referencia excepto ΔB, la sección común de los planos AB, BΓ.

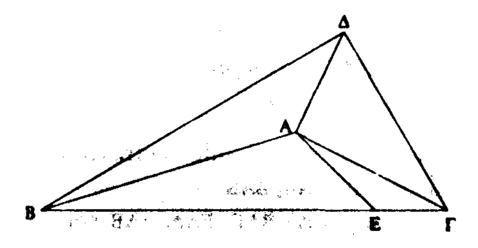
Por consiguiente, si dos planos se cortan formando ángulos rectos con un plano, su sección común formará también ángulos rectos con el mismo. Q. E. D.

Proposición 20

Si un ángulo sólido es comprendido por tres ángulos planos, dos cualesquiera, tomados juntos de cualquier manera, son mayores que el restante.

Sea comprendido el ángulo sólido correspondiente a A por los tres ángulos planos BAΓ, ΓAΔ, ΔAB.

Digo que dos cualesquiera de los ángulos BAΓ, ΓAΔ, ΔAB, tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante.



Pues bien, si los ángulos BAΓ, ΓAΔ, ΔAB son iguales entre sí, está claro que dos cualesquiera son mayores que el restante. Pero si no, sea mayor el (ángulo) BAΓ y constrúyase sobre la

recta AB y en su punto A el ángulo BAE igual al ángulo ΔAB en el plano que pasa a través de BAΓ; hágase AE igual a AΔ, y corte la (recta) BEΓ trazada por el punto E a las rectas AB, AΓ en los puntos B, Γ, y trácense ΔB, ΔΓ. Ahora bien, como ΔA es igual a AE y AB es común, dos (lados) son iguales a dos (lados); y el ángulo ΔAB es igual al ángulo BAE; entonces la base ΔB es igual a la base BE [I 4]. Y como los dos (lados) BΔ, ΔΓ son mayores que BΓ [I 20], de los cuales se ha demostrado que ΔB es igual a BE, entonces el restante ΔΓ es mayor que el restante EΓ. Ahora bien, como ΔA es igual a AE, y AΓ es común y la base ΔΓ es mayor que la base EΓ, entonces el ángulo ΔAΓ es mayor que el ángulo EAΓ [I 25]. Pero se ha demostrado que el (ángulo) ΔAB es igual al (ángulo) BAE; luego los (ángulos) ΔAB, ΔAΓ son mayores que el ángulo BAΓ. De manera semejante demostraríamos que también los restantes tomados juntos dos a dos son mayores que el restante.

Por consiguiente, si un ángulo sólido es comprendido por tres ángulos planos, dos cualesquiera tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante. Q. E. D.

Proposición 21

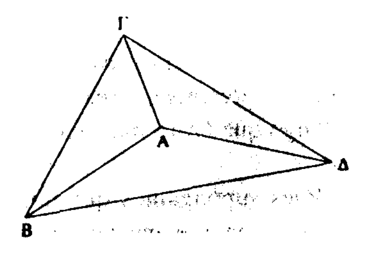
Todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro rectos.

Sea comprendido el ángulo sólido correspondiente a A por los ángulos planos BAΓ, ΓAΔ, ΔAB.

Digo que los (ángulos) BAΓ, ΓAΔ, ΔAB son menores que cuatro rectos.

Tómense, pues, al azar, los puntos B, Γ, Δ en las (rectas) AB, AΓ, AΔ respectivamente, y trácense BΓ, ΓΔ, ΔB. Y como el ángulo sólido correspondiente a B es comprendido por los tres

ángulos planos ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, dos cualesquiera son mayores que el restante [XI 20]. Luego los ángulos ΓΒΑ, ΑΒΔ son mayores que el ángulo ΓΒΔ. Por lo mismo los (ángulos) ΒΓΑ, ΑΓΔ también son mayores que el (ángulo) ΒΓΔ, y los (ángulos) ΓΔΑ, ΑΔΒ son mayores que el (ángulo) ΓΔΒ; entonces los seis ángulos ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ son mayores que los tres (ángulos) ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ. Pero los tres (ángulos) ΓΒΔ, ΒΔΓ, ΒΓΔ son iguales a dos rectos [I 32]. Luego los seis ángulos ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ son mayores que dos rectos. Y como los tres ángulos de cada uno de los triángulos ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ son iguales a dos rectos, entonces los nueve ángulos ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΓΑΔ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ de los tres triángulos son iguales a seis rectos, y de ellos los seis ángulos ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ son mayores que dos rectos; por tanto los tres (ángulos) restantes ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ que comprenden el ángulo sólido son menores que cuatro rectos.



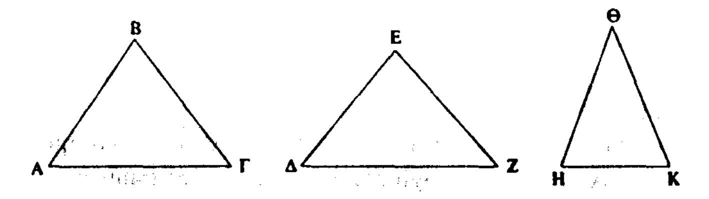
Por consiguiente, todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro rectos. Q. E. D. [54].

[54] Aunque Euclides enuncia esta proposición para cualquier ángulo sólido, sólo la prueba para el caso particular del ángulo triedro. Una interpretación piadosa sería entender que la prueba de los otros casos se deja al aplicado lector. Heath suele dar abundantes muestras de piedad en este sentido. Una es la presente proposición (*op. cit.*, pág 310). De todos modos es la actitud hermenéutica más congruente con la dimensión escolar y los propósitos didácticos que suelen atribuirse a los *Elementos*.

Proposición 22

Si hay tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, y los comprenden rectas iguales, es posible construir un triángulo a partir de las (rectas) que unen (los extremos) de las rectas iguales.

Sean ABΓ, ΔEZ, HΘK tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, a saber: los (ángulos) ABΓ, ΔEZ mayores que el (ángulo)



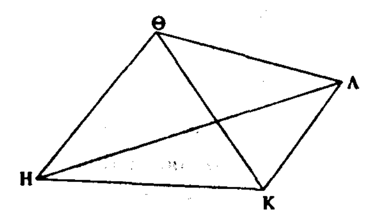
HΘK, los (ángulos) ΔEZ, HΘK mayores que ABΓ y además los (ángulos) HΘK, ABΓ (mayores) que ΔEZ. Y sean iguales las rectas AB, BΓ, ΔE, EZ, HΘ, ΘK, y trácense AΓ, ΔZ, HK.

Digo que es posible construir un triángulo a partir de (rectas) iguales a AΓ, ΔZ, HK, es decir, que dos cualesquiera de las (rectas) AΓ, ΔZ, HK son mayores que la restante.

Pues si los ángulos ABΓ, ΔEZ, HΘK son iguales entre sí, está claro que, siendo también iguales AΓ, ΔZ, HK, es posible construir un triángulo a partir de las (rectas) iguales a AΓ, ΔZ, HK.

Pero si no, sean desiguales y constrúyase en la recta ΘK y en su punto Θ el ángulo KΘΛ igual al ángulo ABΓ, y hágase ΘΛ igual a una de las (rectas) AB, BΓ, ΔE, EZ, HΘ, ΘK, y trácense KΛ, HΛ. Ahora bien, puesto que los dos lados AB, BΓ son iguales a los dos (lados) KΘ, ΘΛ, y el ángulo correspondiente a B es

igual al (ángulo) KΘΛ, entonces la base AΓ es igual a la base KΛ [I 4]. Y como los (ángulos) ABΓ, HΘK son mayores que el (ángulo) ΔEZ y el (ángulo) ΔEZ y el (ángulo) ABΓ es igual al (ángulo) KΘΛ, entonces el (ángulo) HΘΛ es mayor que el (ángulo)



ΔEZ. Y como los dos (lados) HΘ, ΘΛ son iguales a los dos (lados) ΔE, EZ y el (ángulo) HΘΛ es mayor que el (ángulo) ΔEZ, entonces la base HΛ es mayor que la base ΔZ [I 24]. Pero HK, KΛ son mayores que HΛ. Así pues, HK, KΛ son mucho mayores que ΔZ. Pero KΛ es igual a AΓ; luego AΓ, HK son mayores que la restante ΔZ. De manera semejante demostraríamos que AΓ, ΔZ son también mayores que HK, y además ΔZ, HK son mayores que AΓ.

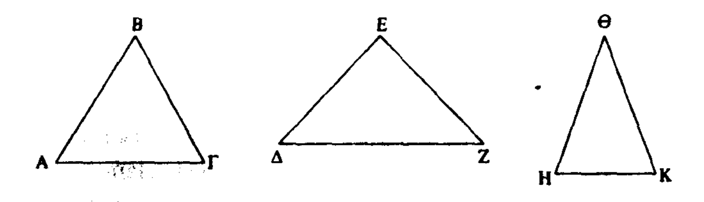
Por consiguiente, es posible construir un triángulo a partir de rectas iguales a las (rectas) AΓ, ΔZ, HK. Q. E. D. [55].

[55] El texto griego da una prueba alternativa que Heiberg relega al apéndice. Simson selecciona esta prueba alternativa en su edición (*Edic. cit.*, pág. 209). Desde el punto de vista lógico esta opción de Simson sería la preferible (Cf. MUELLER, *op. cit.*, pág. 215), aunque parezca más alejada del presunto proceder de Euclides.

PROPOSICIÓN 23

Construir un ángulo sólido a partir de tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante; entonces, es necesario que los tres ángulos sean menores que cuatro rectos.

Sean ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΚΘ los tres ángulos planos dados, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, siendo los tres además menores que cuatro rectos.



Así pues hay que construir un ángulo sólido a partir de (ángulos) iguales a ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ.

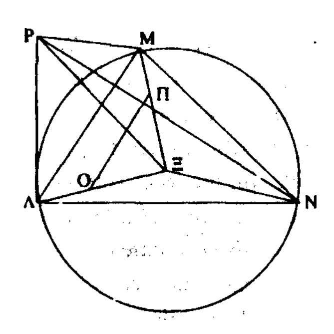
Tómense las (rectas) iguales ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, y trácense ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ [XI 22]. Entonces es posible construir un triángulo a partir de rectas iguales a ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ [XI 22]. Constrúyase y sea ΛΜΝ, de modo que ΑΓ sea igual a ΛΜ, ΔΖ a ΜΝ y además ΗΚ a ΝΛ, y circunscríbase en torno al triángulo ΛΜΝ el círculo ΛΜΝ, tómese su centro y sea Ξ y trácense ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ.

Digo que ΑΒ es mayor que ΛΞ. Pues, si no, o ΑΒ es igual a ΛΞ o es menor. En primer lugar sea igual. Y como ΑΒ es igual a ΛΞ, mientras que ΑΒ es igual a ΒΓ y ΞΛ a ΞΜ, entonces los dos (lados) ΑΒ, ΒΓ son iguales respectivamente a los dos (lados) ΛΞ, ΞΜ; y se ha supuesto que la base ΑΓ es igual a la

base ΛM; luego el (ángulo) ABΓ es igual al ángulo ΛΞM [I 8]. Por la misma razón el (ángulo) ΔEZ es igual al (ángulo) MΞN y además el (ángulo) HΘK (es igual) al (ángulo) NΞΛ, luego los tres ángulos ABΓ, ΔEZ, HΘK son iguales a los tres ángulos ΛΞM, MΞN, NΞΛ. Pero los tres (ángulos) ΛΞM, MΞN, NΞΛ son iguales a cuatro rectos, entonces los tres (ángulos) ABΓ, ΔEZ, HΘK son iguales a cuatro rectos. Pero se ha supuesto que son menores que cuatro rectos; lo cual es absurdo. Luego AB no es igual a ΛΞ.

Digo además que AB tampoco es menor que ΛΞ.

Porque si fuera posible sea así y hágase ΞO igual a AB, ΞΠ igual a BΓ y trácese OΠ. Ahora bien, como AB es igual a BΓ, ΞO es igual a ΞΠ; de modo que la (recta) restante ΛO es igual a ΠM. Entonces ΛM es paralela a OΠ [VI 2] y ΛMΞ, OΠΞ son equiangulares [I 29]; luego, como ΞΛ es a ΛM, así ΞO a OΠ [VI 4]; y por alternancia, como ΛΞ es a ΞO, así ΛM a OΠ [V 16]. Pero ΛΞ es mayor que ΞO; entonces ΛM es mayor que OΠ. Pero ΛM se ha hecho igual a AΓ; luego AΓ es también mayor que OΠ. Pues bien, como los dos (lados) AB, BΓ son iguales a



los dos (lados) OΞ, ΞΠ, y la base AΓ es mayor que la base OΠ, entonces el (ángulo) ABΓ es mayor que el (ángulo) OΞΠ [I 25]. De manera semejante demostraríamos que el (ángulo) ΔEZ es también mayor que el (ángulo) MΞN y el (ángulo) HΘK

(mayor) que el (ángulo) NΞΛ. Por tanto, los tres ángulos ABΓ, ΔEZ, HΘK son mayores que los tres (ángulos) ΛΞM, MΞN, NΞΛ. Pero se ha supuesto que los (ángulos) ABΓ, ΔEZ, HΘK son menores que cuatro rectos; entonces los (ángulos) ΛΞM, MΞN, NΞΛ son mucho menores que cuatro rectos. Pero también iguales, lo cual es absurdo. Luego AB no es menor que ΛΞ. Pero se ha demostrado que tampoco es igual; por tanto AB es mayor que ΛΞ.

Levántese desde el punto Ξ la (recta) ΞP formando ángulos rectos con el plano del círculo ΛMN [XI 12]; y sea el cuadrado de ΞP igual al (área) en la que el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de ΛΞ [Lema], y trácense PΛ, PM, PN. Ahora bien, como PΞ forma ángulos rectos con el plano del círculo ΛMN, entonces PΞ forma también ángulos rectos con cada una de las (rectas) ΛΞ, MΞ, NΞ. Y como ΛΞ es igual a ΞM y ΞP es común y forma ángulos rectos, entonces la base PΛ es igual a la base PM [I 4]. Por lo mismo PN es igual a cada una de las (rectas) PΛ, PM; entonces las tres (rectas) PΛ, PM, PN son iguales entre sí. Y como se ha supuesto que el (cuadrado) de ΞP es igual al (área) en la que el (cuadrado) de AB es mayor que el (cuadrado) de ΛΞ, entonces el (cuadrado) de AB es igual a los (cuadrados) de ΛΞ, ΞP. Pero el (cuadrado) de ΛP es igual a los (cuadrados) de ΛΞ, ΞP: porque el (ángulo) ΛΞP es recto [I 47]; entonces el (cuadrado) de AB es igual al (cuadrado) de PΛ; luego AB es igual a PΛ. Pero cada una de las (rectas) BΓ, ΔE, EZ, HΘ, ΘK es igual a AB, y cada una de las (rectas) PM, PN es igual a PΛ; entonces cada una de las (rectas) AB, BΓ, ΔE, EZ, HΘ, ΘK es igual a cada una de las (rectas) PΛ, PM, PN. Ahora bien, como los dos (lados) ΛP, PM son iguales a los dos (lados) AB, BΓ y se ha supuesto que la base ΛM es igual a la base AΓ, entonces el ángulo ΛPM es igual al ángulo ABΓ [I 8]. Por lo mismo, el (ángulo) MPN es igual al (ángulo) ΔEZ y el (ángulo) ΛPN al (ángulo) HΘK.

Por consiguiente, a partir de los tres ángulos planos ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ que son iguales a los tres dados ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, se ha construido el ángulo sólido correspondiente a Ρ comprendido por los ángulos ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ. Q. E. F.[56].

LEMA:

Demostraríamos como sigue de qué manera se puede tomar el cuadrado de ΞΡ igual al área en la que el cuadrado de ΑΒ es mayor que el cuadrado de ΛΞ:

Pónganse las rectas ΑΒ, ΛΞ, y sea ΑΒ mayor, y descríbase sobre ella el semicírculo ΑΒΓ, y adáptese al semicírculo ΑΒΓ la (recta) ΑΓ igual a la recta ΛΞ que no sea mayor que el diámetro ΑΒ [IV 1]; y trácese ΓΒ. Así pues, como ΑΓΒ es un ángulo en el semicírculo ΑΓΒ, entonces el (ángulo) ΑΓΒ es recto [III 31]. Luego el cuadrado de ΑΒ es igual a los cuadrados de ΑΓ, ΓΒ [I 47]. De modo que el cuadrado de ΑΒ es mayor que el cuadrado de ΑΓ en el cuadrado de ΓΒ. Pero ΑΓ es igual a ΛΞ. Luego el cuadrado de ΑΒ es mayor que el cuadrado de ΛΞ en el cuadrado de ΓΒ. Pues bien, si tomamos la (recta) ΞΡ igual a ΒΓ, el cuadrado de ΑΒ es mayor que el cuadrado de ΛΞ en el cuadrado de ΞΡ. Que es lo que se ha propuesto hacer.



[56] Euclides, como de costumbre, presenta la prueba para *un* sólo caso, aquel en que Ξ, el centro del círculo que circunscribe al triángulo ΠΛΝ, cae dentro del triángulo. La prueba de los otros dos casos aparece en el texto griego detrás de la cláusula *hóper édei poiêsai.* Esta posición hace suponer que las pruebas no son de Euclides sino que se trata de una interpolación (Cf. HEATH, *op. cit.*, III, pág. 319). Al final del lema aparece la insólita cláusula *hóper proékeito poiêsai*, en vez de la habitual *hóper édei poiêsai.*

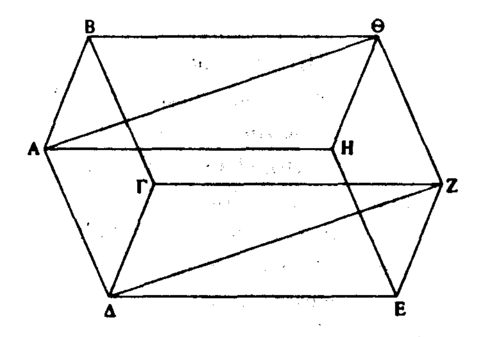
Proposición 24

Si un sólido es comprendido por planos paralelos, sus planos opuestos son iguales y paralelogramos.

Sea comprendido el sólido ΓΔΘΗ por los planos paralelos ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ.

Digo que sus planos opuestos son iguales y paralelogramos.

Pues como los dos planos paralelos ΒΗ, ΓΕ se cortan por el plano ΑΓ, sus secciones comunes son paralelas [XI 16]. Entonces ΑΒ es paralela a ΔΓ. Como los dos planos paralelos ΒΖ, ΑΕ se cortan a su vez por el plano ΑΓ, sus secciones comunes son



paralelas [XI 16]. Entonces ΒΓ es paralela a ΑΔ. Pero se ha demostrado que ΑΒ es paralela a ΔΓ; luego ΑΓ es un paralelogramo. De manera semejante demostraríamos que cada uno de los (planos) ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ, ΑΕ es un paralelogramo.

Trácense las (rectas) ΑΘ, ΔΖ. Y como ΑΒ es paralela a ΔΓ y ΒΘ a ΓΖ, entonces las dos rectas que se tocan ΑΒ, ΒΘ son paralelas a las dos rectas que se tocan ΔΓ, ΓΖ sin estar en el mismo plano. Luego comprenderán ángulos iguales [XI 10]. Por tanto el ángulo ΑΒΘ es igual al (ángulo) ΔΓΖ. Y como los dos (lados)

AB, BΘ son iguales a los dos (lados) ΔΓ, ΓZ [I 34], y el (ángulo) ABΘ es igual al ángulo ΔΓZ, entonces la base AΘ es igual a la base ΔZ, y el triángulo ABΘ es igual al triángulo ΔΓZ [I 4]. Ahora bien, el paralelogramo BH es el doble del (triángulo) ABΘ y el paralelogramo ΓE es doble del (triángulo) ΔΓZ [I 34]; luego el paralelogramo BH es igual al paralelogramo ΓE. De manera semejante demostraríamos que el (paralelogramo) AΓ es igual al (paralelogramo) HZ y el (paralelogramo) AE al (paralelogramo) BZ.

Por consiguiente, si un sólido es comprendido por planos paralelos, sus planos opuestos son iguales y paralelogramos. Q. E. D.[57].

Proposición 25

Si un sólido paralelepípedo[58] *es cortado por un plano que sea paralelo a los planos opuestos, entonces, como la base es a la base, así será el sólido al sólido.*

Sea cortado, pues, el sólido paralelepípedo ABΓΔ por el plano ZH que es paralelo a los planos opuestos PA, ΔΘ.

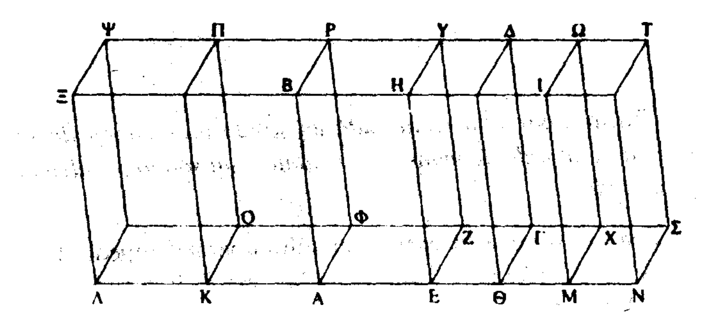
[57] Como señala Heiberg, el enunciado de esta proposición es defectuoso, pues no dice expresamente que el cuerpo que se considera está limitado sólo por seis planos. Un enunciado más correcto sería: «Si un sólido está comprendido por seis planos paralelos dos a dos, las caras opuestas son paralelogramos respectivamente iguales y semejantes.»

Simson añade «semejantes» porque esta condición es necesaria para que, en la proposición siguiente, la igualdad de los paralelepípedos se pruebe a partir de la def. 10 del libro XI.

[58] El adjetivo *parallēlepípedos* aparece por primera vez aquí sin ninguna explicación o definición como sucedía con el término *parallēlógramon*. Aunque significa «de planos paralelos», se aplica específicamente a los sólidos que son comprendidos por seis planos paralelos dos a dos.

Digo que como la base AEZΦ es a la base EΘΓZ, así el sólido ABZY es al sólido EHΓΔ.

Pues prolónguese AΘ por cada lado y hágase un número cualquiera de (rectas) AK, KΛ iguales a AE, y un número cualquiera de (rectas) ΘM, MN iguales a EΘ, y complétense los paralelogramos ΛO, KΦ, ΘX, MΣ y los sólidos ΛΠ, KP, ΔM, MT.



Ahora bien, como las rectas ΛK, KA, AE son iguales entre sí, los paralelogramos ΛO, KΦ, AZ son también iguales entre sí, y KΞ, KB, AH (son iguales) entre sí y además ΛΨ, KΠ, AP (son iguales) entre sí: porque son opuestos [XI 24].

Por la misma razón, los paralelogramos EΓ, ΘX, MΣ son también iguales entre sí, y los (paralelogramos) ΘH, ΘI, IN son también iguales entre sí, y además los (paralelogramos) ΔΘ, MΩ, NT son iguales entre sí; entonces, en los sólidos ΛΠ, KP, AY tres planos son iguales a tres planos. Y los tres planos son iguales a los tres opuestos. Luego los tres sólidos ΛΠ, KP, AY son iguales entre sí.

Las caras opuestas en cada grupo de sólidos en esta proposición no sólo son iguales sino también semejantes. Euclides infiere la igualdad de los sólidos a partir de XI Def. 10. Según explicamos en la nota 47, esta definición es válida sólo en el caso de que los ángulos sólidos no estén comprendidos por más de tres ángulos planos.

Por lo mismo, los tres solidos EΔ, ΔM, MT son iguales entre sí; así pues, cuantas veces la base ΛZ es múltiplo de la base AZ, tantas es múltiplo el sólido ΛY del sólido AY.

Por lo mismo, cuantas veces la base NZ es múltiplo de la base ZΘ, tantas es múltiplo el sólido NY del sólido ΘY. Y si la base ΛZ es igual a la base NZ, el sólido ΛY es igual al sólido NY, y si la base ΛZ excede a la base NZ, el sólido ΛY excede al sólido NY, y si (uno) es deficiente el (otro) es deficiente. Por tanto, habiendo cuatro magnitudes, a saber: las dos bases AZ, ZΘ y los dos sólidos AY, YΘ, se han tomado como equimúltiplos de la base AZ y del sólido AY, la base ΛZ y el sólido ΛY, y de la base ΘZ y el sólido ΘY, la base NZ y el sólido NY, y se ha demostrado que si la base ΛZ excede a la base ZN, el sólido ΛY excede también al sólido NY, y si es igual, es igual y si es deficiente, es deficiente.

Por consiguiente, como la base AZ es a la base ZΘ, así el sólido AY al sólido YΘ. Q. E. D.

Proposición 26

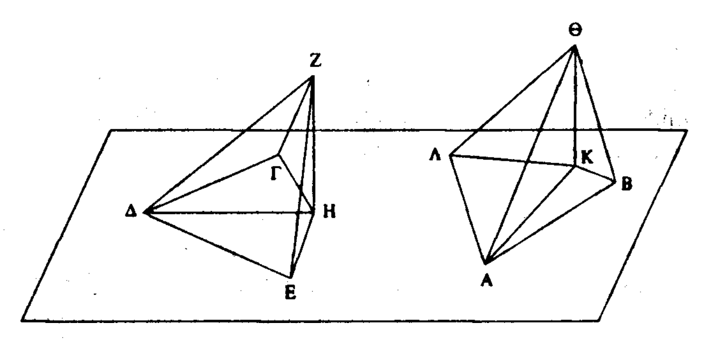
Construir un ángulo sólido igual a un ángulo sólido dado sobre una recta dada y en uno de sus puntos.

Sea AB la recta dada y A el punto dado en ella y sea el (ángulo) correspondiente a Δ el ángulo dado, comprendido por los ángulos planos EΔΓ, EΔZ, ZΔΓ.

Así pues, hay que construir un ángulo sólido igual al ángulo sólido correspondiente a Δ sobre la recta AB y en su punto A.

Tómese al azar un punto Z en la (recta) ΔZ; trácese ZH desde el (punto) Z perpendicular al plano que pasa por EΔ, ΔΓ [XI 11], y únase con el plano en el (punto) H; trácese ΔH y constrúyase sobre la recta AB y en su punto A el (ángulo) BAΛ igual al

ángulo EΔΓ, y el (ángulo) BAK igual al ángulo EΔH [I 23]; hágase AK igual a ΔH y levántese desde el punto K la (recta) KΘ formando ángulos rectos con el plano que pasa por BAΛ [XI 12]; hágase KΘ igual a HZ y trácese ΘA.



Digo que el ángulo sólido correspondiente a A, comprendido por los ángulos BAΛ, BAΘ, ΘAΛ es igual al ángulo sólido correspondiente a Δ, comprendido por los ángulos EΔΓ, EΔZ, ZΔΓ.

Pues tómense las (rectas) iguales AB, ΔE y trácense ΘB, KB, ZE, HE. Y como ZH es ortogonal al plano de referencia, entonces hará ángulos rectos con todas las (rectas) que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]; luego cada uno de los ángulos ZHΔ, ZHE es recto. Por lo mismo, cada uno de los ángulos ΘKA, ΘKB es también recto. Y como los dos (lados) KA, AB son iguales respectivamente a los dos (lados) HΔ, ΔE y comprenden ángulos iguales, entonces la base KB es igual a la base HE [I 4]. Pero KΘ es igual a HZ; y comprenden ángulos rectos; entonces también ΘB es igual a ZE [I 4]. Como los dos (lados) AK, KΘ son a su vez iguales a los dos (lados) ΔH, HZ y comprenden ángulos rectos, entonces la base AΘ es igual a la base ZΔ [I 4]. Pero AB es igual también a ΔE; entonces los dos (lados) ΘA, AB son iguales a los dos (lados) ΔZ, ΔE. Y la base ΘB es igual a la base ZE; luego el ángulo BAΘ es igual al ángulo EΔZ [I

8]. Por lo mismo, el (ángulo) ΘΑΛ es también igual al (ángulo) ZΔΓ. Y el (ángulo) BAΛ es también igual al (ángulo) EΔΓ.

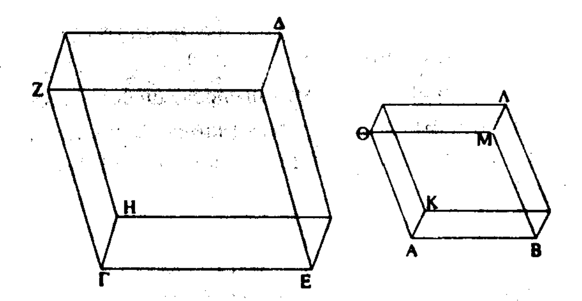
Por consiguiente, se ha construido (un ángulo sólido) igual al ángulo sólido dado correspondiente a Δ, sobre la recta dada AB y en su punto dado A. Q. E. F.

Proposición 27

Trazar sobre una recta dada un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante a un sólido paralelepípedo dado.

Sea AB la recta dada y ΓΔ el sólido paralelepípedo dado. Así pues, hay que trazar sobre la recta dada AB un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante al sólido paralelepípedo dado ΓΔ.

Constrúyase, pues, en la recta AB y en su punto A un (ángulo) igual al ángulo sólido correspondiente a Γ comprendido por los (ángulos) BAΘ, ΘAK, KAB, de modo que el (ángulo) BAΘ



sea igual al ángulo EΓZ, el (ángulo) BAK al (ángulo) EΓH y el (ángulo) KAΘ al (ángulo) HΓZ; y hágase de forma que, como EΓ es a ΓH, así BA a AK, y como HΓ es a ΓZ, así KA a AΘ [VI 12].

Luego, por igualdad, como ΕΓ es a ΓΖ, así ΒΑ a ΑΘ [V 22]. Complétese el paralelogramo ΘΒ y el sólido ΑΛ.

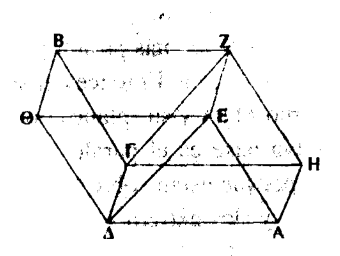
Y dado que, como ΕΓ es a ΓΗ, así ΒΑ a ΑΚ, y los lados que comprenden los ángulos iguales ΕΓΗ, ΒΑΚ son proporcionales, entonces el paralelogramo ΗΕ es semejante al paralelogramo ΚΒ. Por lo mismo, el paralelogramo ΚΘ es semejante al paralelogramo ΗΖ y ΖΕ a ΘΒ; luego tres paralelogramos del sólido ΓΔ son semejantes a tres paralelogramos del sólido ΑΛ. Pero los tres primeros son iguales y semejantes a los tres opuestos y los otros tres son también iguales y semejantes a los tres opuestos; luego el solido entero ΓΔ es semejante al sólido entero ΑΛ [XI Def. 9].

Por consiguiente, se ha trazado sobre la recta dada ΑΒ el sólido paralelepípedo ΑΛ semejante y situado de manera semejante al dado ΓΔ. Q. E. F.

Proposición 28

Si un sólido paralelepípedo es cortado por un plano según las diagonales de los planos opuestos, el sólido será dividido en dos partes iguales por el plano.

Córtese, pues, el sólido paralelepípedo ΑΒ por el plano ΓΔΕΖ según las diagonales ΓΖ, ΔΕ de sus planos opuestos.



Digo que el sólido ΑΒ será dividido en dos partes iguales por el plano ΓΔΕΖ.

Pues como el triángulo ΓΗΖ es igual al triángulo ΓΖΒ [I 34] y el (triángulo) ΑΔΕ al ΔΕΘ, mientras que el paralelogramo ΓΑ es también igual al (parale-

logramo) EB: porque son opuestos; y HE (es igual) a ΓΘ, entonces el prisma comprendido por los dos triángulos ΓHZ, AΔE y los tres paralelogramos HE, AΓ, ΓE es también igual al prisma comprendido por los dos triángulos ΓZB, ΔEΘ y los tres paralelogramos ΓΘ, BE, ΓE: porque son comprendidos por planos iguales en número y tamaño. De modo que el sólido entero AB ha sido dividido en dos partes iguales por el plano ΓΔEZ. Q. E. D.[59].

Proposición 29

Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura, y en los que (los extremos superiores) de las aristas laterales están en las mismas rectas son iguales entre sí[60].

Estén sobre la misma base AB y tengan la misma altura los sólidos paralelepípedos ΓM, ΓN en los que (los extremos de) las

---

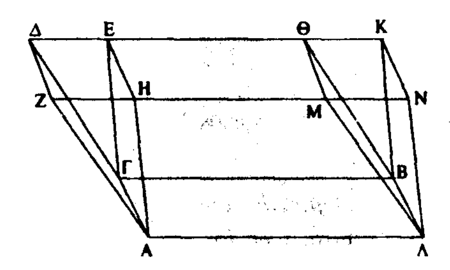
[59] Simson observa que se debería haber probado que las diagonales de dos caras opuestas están en un plano antes de decir que se trace el plano que pasa a través de ellas. Pero hay una dificultad más importante que parece haberle pasado desapercibida. Euclides presenta dos prismas comprendidos por caras iguales (de hecho son iguales y semejantes) e infiere directamente que los prismas son iguales. Pero no son iguales en el sentido en que se ha empleado el término hasta ahora, es decir en el de que pueden ser aplicados uno a otro. No pueden ser aplicados así porque las caras, aunque son iguales respectivamente, no están situadas de manera semejante: en consecuencia los prismas son simétricos y debe ser probado que, aunque no son iguales y semejantes, son equivalentes, como ha sugerido Legendre (Cf. Heath, *op. cit.*, III, págs. 331-33).

[60] *Hai ephestôsai* o *hai ephestēkyîai* quiere decir literalmente «las (rectas) levantadas». Mugler traduce (*op. cit.*, pág. 210) por «aristas laterales», pero en este contexto, habría que aclarar que se trata de los extremos o vértices de tales aristas.

aristas laterales AH, AZ, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK están en las mismas rectas ZN, ΔK.

Digo que el sólido ΓM es igual al sólido ΓN.

Pues como cada una de las (figuras) ΓΘ, ΓK es un paralelogramo, ΓB es igual a cada una de las (rectas) ΔΘ, EK [I 34]; de modo que ΔΘ es igual a EK. Quítese de ambas EΘ; entonces la (recta) restante ΔE es igual a la (recta) restante ΘK. De modo



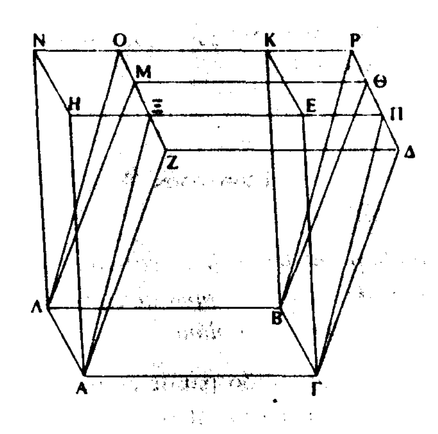
que el triángulo ΔΓE es también igual al triángulo ΘBK [I 8, 4] y el paralelogramo ΔH al paralelogramo ΘN [I 36]. Por lo mismo, el triángulo AZH es también igual al triángulo MΛN. Pero el paralelogramo ΓZ es también igual al paralelogramo BM y el (paralelogramo) ΓH al (paralelogramo) BN: porque son opuestos. Luego el prisma comprendido por los dos triángulos AZH, ΔΓE y los tres paralelogramos AΔ, ΔH, ΓH es igual al prisma comprendido por los dos triángulos MΛN, ΘBK y los tres paralelogramos BM, ΘN, BN. Añádase a uno y otro el sólido cuya base es el paralelogramo AB y su (plano) opuesto HEΘM; entonces el sólido paralelepípedo entero ΓM es igual al sólido paralelepípedo entero ΓN.

Por consiguiente, los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura y en los que (los extremos superiores) de las aristas laterales están en las mismas rectas son iguales entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 30

Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura y en los que (los extremos superiores de) las aristas laterales no están en las mismas rectas son iguales entre sí.

Estén sobre la misma base, AB, y tengan la misma altura los sólidos paralelepípedos ΓM, ΓN en los que (los extremos superiores de) las aristas laterales AZ, AH, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK no están en las misma rectas.



Digo que el sólido ΓM es igual al sólido ΓN.

Prolónguense NK, ΔΘ y únanse en P y además prolónguense ZM, HE hasta O, Π, y trácense AΞ, ΛO, ΓΠ, BP. Entonces el sólido ΓM cuya base es el paralelogramo AΓBΛ y su (plano) opuesto ZΔΘM es igual al sólido ΓO cuya base es el paralelogramo AΓBΛ y su (plano) opuesto ΞΠPO: porque están sobre la misma base ABΓΛ y tienen la misma altura y (los extremos superiores de) las aristas laterales AZ, AΞ, ΛM, ΛO, ΓΔ, ΓΠ, BΘ, BP están en

las mismas rectas ZO, ΔP [XI 29]. Pero el sólido ΓO cuya base es el paralelogramo AΓBΛ y su (plano) opuesto ΞΠPO es igual al sólido ΛN cuya base es el paralelogramo AΓBΛ y su (plano) opuesto HEKN: porque a su vez está sobre la misma base AΓBΛ y tiene la misma altura y (los extremos superiores de) sus aristas laterales AH, AΞ, ΓE, ΓΠ, ΛN, ΛO, BK, BP están en las mismas rectas HΠ, NP. De modo que el sólido ΓM es también igual al sólido ΓN.

Por consiguiente, los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura y en los que (los extremos superiores de) las aristas laterales no están en las mismas rectas son iguales. Q. E. D.

Proposición 31

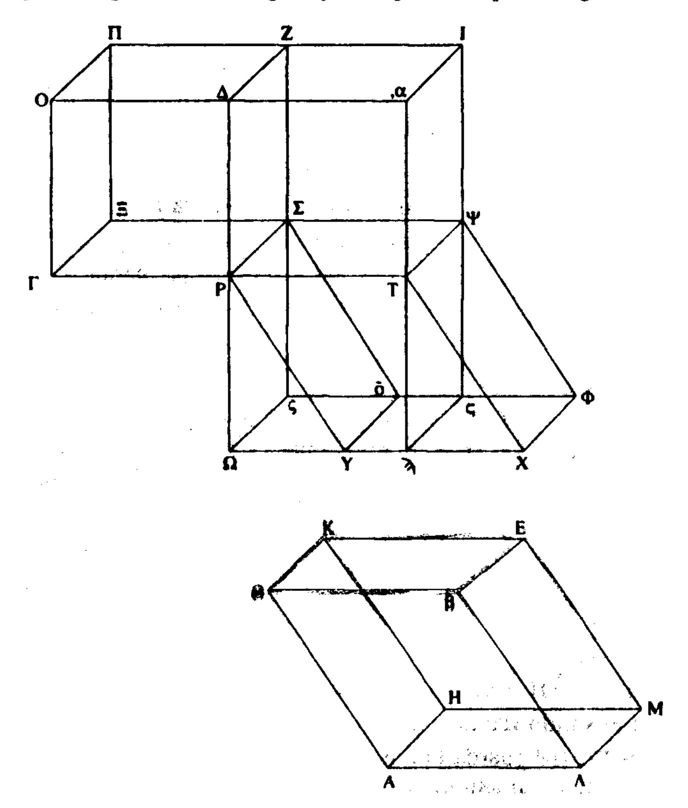
Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura son iguales entre sí.

Estén los sólidos paralelepípedos AE, ΓZ sobre las bases iguales AB, ΓΔ, y tengan la misma altura.

Digo que el sólido AE es igual al sólido ΓZ.

Formen ángulos rectos, en primer lugar, las aristas laterales ΘK, BE, AH, ΛM, OΠ, ΔZ, ΓΞ, PΣ con las bases AB, ΓΔ y sea PT el resultado de prolongar en línea recta la recta ΓP, y constrúyase en la recta PT y en su punto P el (ángulo) TPY igual al (ángulo) AΛB [I 23]; hágase PT igual a AΛ y PY igual a ΛB y complétese la base PX y el sólido ΨY. Pues bien, como las dos (rectas) TP, PY son iguales a las dos (rectas) AΛ, ΛB y comprenden ángulos iguales, entonces el paralelogramo PX es igual y semejante al paralelogramo ΘΛ. Y como AΛ es a su vez igual a PT y ΛM a PΣ, y comprenden ángulos rectos, entonces el paralelogramo

ΡΨ es igual y semejante al paralelogramo ΑΜ. Por lo mismo, el (paralelogramo) ΛΕ es igual y semejante al (paralelogramo) ΣΥ;



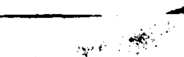
luego tres paralelogramos del sólido ΑΕ son iguales y semejantes a tres paralelogramos del sólido ΨΥ. Pero los tres primeros son iguales y semejantes a los tres opuestos y los otros tres a los tres opuestos [XI 24]; luego el sólido paralelepípedo entero ΑΕ es igual al sólido paralelepípedo entero ΨΥ [XI Def. 10]. Trácense ΔΡ, ΧΥ y encuéntrense en el (punto) Ω, y a través de Τ, trácese ,αΤϡ paralela a ΔΩ, y prolónguese ΟΔ hasta ,α, y

complétense los sólidos ΩΨ, ΡΙ. Entonces el sólido ΨΩ cuya base es el paralelogramo ΡΨ y su (cara) opuesta Ως es igual al sólido ΨΥ cuya base es el paralelogramo ΡΨ y su (cara) opuesta ΥΦ: porque están sobre la misma base ΡΨ y tienen la misma altura y (los extremos superiores de) sus aristas laterales ΡΩ, ΡΥ, Τλ, ΤΧ, Σς, Σõ, Ψς, ΨΦ están sobre las mismas rectas ΩΧ, ςΦ [XI 29]. Pero el sólido ΨΥ es igual al sólido ΑΕ. Luego el sólido ΨΩ es también igual al sólido ΑΕ. Ahora bien, como el paralelogramo ΡΥΧΤ es igual al paralelogramo ΩΤ –porque están sobre la misma base, ΡΤ, y entre las mismas paralelas ΡΤ, ΩΧ [I 35]– mientras que el (paralelogramo) ΡΥΧΤ es igual al (paralelogramo) ΓΔ –porque es igual también a ΑΒ–, entonces el (paralelogramo) ΩΤ es también igual al (paralelogramo) ΓΔ. Pero ΔΤ es otro (paralelogramo); luego, como la base ΓΔ es a ΔΤ, así ΩΤ a ΔΤ [V 7]. Ahora bien, puesto que el sólido paralelepípedo ΓΙ ha sido cortado por el plano ΡΖ, que es paralelo a los planos opuestos, como la base ΓΔ es a la base ΔΤ, así el sólido ΓΖ al sólido ΡΙ [XI 25]. Por lo mismo, puesto que el sólido paralelepípedo ΩΙ ha sido cortado por el plano ΡΨ que es paralelo a los planos opuestos, como la base ΩΤ es a la base ΤΔ, así el sólido ΩΨ al (sólido) ΡΙ [XI 25]. Pero como la base ΓΔ es a la base ΔΤ, así ΩΤ a ΔΤ; entonces, como el sólido ΓΖ es al sólido ΡΙ, así el sólido ΩΨ al sólido ΡΙ [V 11]. Luego cada uno de los sólidos ΓΖ, ΩΨ guarda la misma razón con ΡΙ; así pues, el sólido ΓΖ es igual al sólido ΩΨ [V 9]. Pero se ha demostrado que ΩΨ es igual a ΑΕ; por tanto, ΑΕ es también igual a ΓΖ.

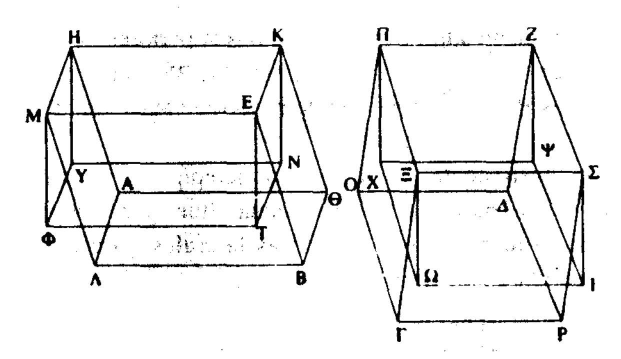
Ahora no formen ángulos rectos las aristas laterales ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ, ΓΝ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ con las bases ΑΒ, ΓΔ.

Digo una vez más que el sólido ΑΕ es igual al sólido ΓΖ.

Pues trácense desde los puntos Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ν, Σ hasta el plano de referencia las perpendiculares ΚΞ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΝΩ, ΣΙ, y únanse con el plano en los puntos Ξ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι, y trácense ΞΤ, ΞΥ, ΥΦ, ΤΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΙΨ. Entonces el sólido



KΦ es igual al sólido ΠΙ: porque están sobre las bases iguales KM, ΠΣ y tienen la misma altura y sus aristas laterales forman ángulos rectos con las bases [1ª parte de la proposición]. Pero



el sólido KΦ es igual al sólido AE, y el (sólido) ΠΙ al (sólido) ΓZ: porque están sobre la misma base y tienen la misma altura y (los extremos superiores de) sus aristas laterales no están sobre las mismas rectas [XI 30]. Luego el sólido AE es igual al sólido ΓZ.

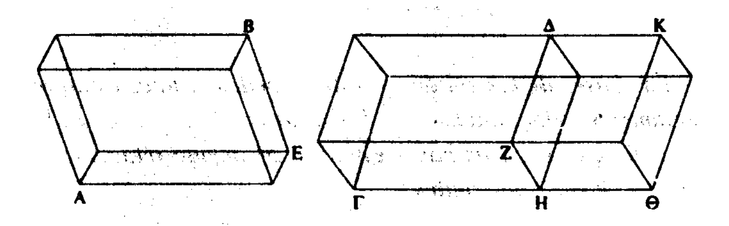
Por consiguiente, los sólidos paralelogramos que están sobre bases iguales y tienen la misma altura son iguales entre sí. Q. E. D.

Proposición 32

Los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Tengan la misma altura los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ. Digo que los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ son entre sí como sus bases, es decir que como la base AE es a la base ΓZ, así el sólido AB al sólido ΓΔ.

Aplíquese, pues, a la (recta) ZH el (paralelogramo) ZΘ igual a AE [I 45], y a partir de la base ZΘ y de la misma altura que la de ΓΔ, complétese el sólido paralelepípedo HK. Entonces el sólido AB es igual al sólido HK: porque están sobre bases iguales



AE, ZΘ y (tienen) la misma altura [XI 31]. Y puesto que el sólido paralelepípedo ΓK ha sido cortado por el plano ΔH que es paralelo a los planos opuestos, entonces, como la base ΓZ es a la base ZΘ, así el sólido ΓΔ al sólido ΔΘ [XI 25]. Pero la base ZΘ es igual a la base AE y el sólido HK al sólido AB; luego, como la base AE es a la base ΓZ, así el sólido AB al sólido ΓΔ.

Por consiguiente, los solidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases. Q. E. D.

Proposición 33

Los sólidos paralelepípedos semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.

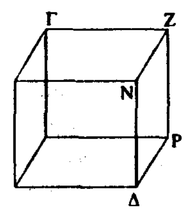
Sean AB, ΓΔ sólidos paralelepípedos semejantes y sea el (lado) AE correspondiente al (lado) ΓZ.

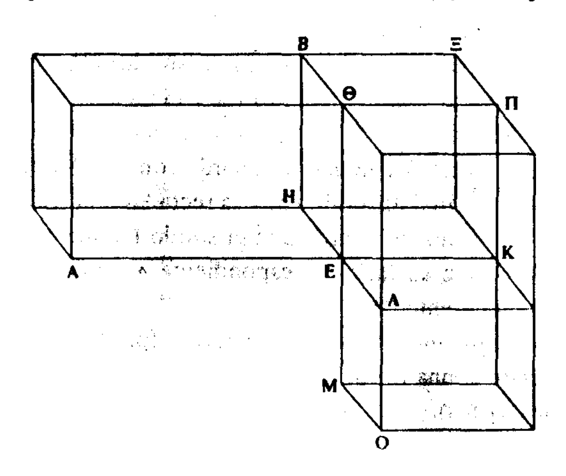
Digo que el sólido AB guarda con el sólido ΓΔ una razón triplicada de la que el (lado) AE (guarda con) el (lado) ΓZ.

Sean EK, EΛ, EM el resultado de prolongar en línea recta las (rectas) AE, HE, ΘE; hágase EK igual a ΓZ, EΛ igual a ZN, y ade-

más EM igual a ZP; y complétense el paralelogramo KΛ y el sólido KO.

Ahora bien, como los dos (lados) KE, EΛ son iguales a los dos (lados) ΓZ, ZN, mientras que el ángulo KEΛ es igual al ángulo ΓZN: porque también el (ángulo) AEH es igual al (ángulo) ΓZN por la semejanza de los sólidos AB, ΓΔ; entonces el paralelogramo KΛ es igual al paralelogramo ΓN. Por lo mismo el paralelogramo KM es también igual y semejante al (paralelogramo) ΓP y además el (paralelogramo) EO al ΔZ; luego tres paralelogramos del sólido KO son iguales y semejantes a tres paralelogramos del sólido ΓΔ. Pero los tres primeros son iguales y semejantes a sus tres opuestos y los otros tres a sus opuestos [XI 24]; luego el sólido entero KO es igual y semejante al sólido entero ΓΔ [XI Def. 10]. Complétese el





paralelogramo HK y, tomando como bases los paralelogramos HK, KΛ y con la misma altura que la de AB, complétense los sólidos EΞ, ΛΠ. Y puesto que, por la semejanza de los sólidos

AB, ΓΔ, como AE es a ΓZ, así EH a ZN y EΘ a ZP, mientras que ΓZ es igual a EK, ZN a EΛ y ZP a EM, entonces, como AE es a EK, así HE a EΛ y ΘE a EM. Pero como AE es a EK, así el (paralelogramo) AH al paralelogramo HK, mientras que, como HE es a EΛ, así HK a KΛ, y como ΘE es a EM, así ΠE a KM [VI 1]; luego también, como el (paralelogramo) AH es al HK, así el (paralelogramo) HK al (paralelogramo) KΛ y el (paralelogramo) ΠE al (paralelogramo) KM. Pero como el (paralelogramo) AH es al (paralelogramo) HK, así el sólido AB al sólido EΞ, mientras que, como el (paralelogramo) HK es al (paralelogramo) KΛ, así el sólido ΞE al sólido ΠΛ, y como el (paralelogramo) ΠE es al (paralelogramo) KM, así el sólido ΠΛ al sólido KO [XI 32]; luego, como el sólido AB es al sólido EΞ, así el (sólido) EΞ al (sólido) ΠΛ y el (sólido) ΠΛ al (sólido) KO. Pero si cuatro magnitudes están en proporción continua, la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda [V Def. 10]; luego el sólido AB guarda con el sólido KO una razón triplicada de la que AB guarda con EΞ. Pero como el (sólido) AB es al (sólido) EΞ, así el paralelogramo AH al (paralelogramo) HK y la recta AE a la recta EK [VI 1]; de modo que el sólido AB guarda con el sólido KO una razón triplicada de la que AE guarda con EK. Ahora bien, el sólido KO es igual al sólido ΓΔ, y la recta EK a la (recta) ΓZ; por tanto, el sólido AB guarda con el sólido ΓΔ una razón triplicada de la que su lado correspondiente AE guarda con el lado correspondiente ΓZ.

Por consiguiente, los sólidos paralelepípedos semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes. Q. E. D.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si cuatro rectas son ⟨continuamente⟩ proporcionales, como la primera es a la cuarta, así el sólido paralelepípedo (construido) a partir de la primera al

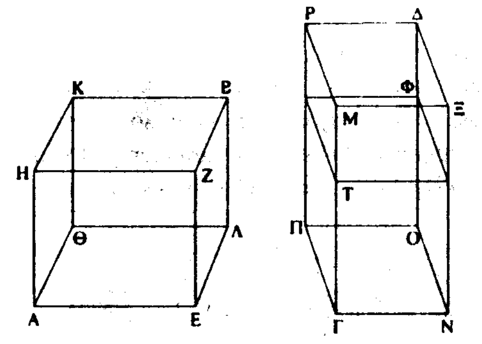
semejante y construido de manera semejante sobre la segunda, porque también la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda[61].

PROPOSICIÓN 34

Las bases de los sólidos paralelepípedos iguales están inversamente relacionadas con las alturas; y aquellos sólidos paralelepípedos cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales.

Sean AB, ΓΔ sólidos paralelepípedos iguales.

Digo que las bases de los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ están inversamente relacionadas con sus alturas, (es decir que)



como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido AB.

[61] Heiberg duda de la autenticidad del porisma. Por otra parte, Simson añade un teorema muy útil que esperaríamos encontrar en este lugar por analogía con VI 23 –en relación con VI 19-20–: «Los paralelepípedos contenidos por paralelogramos respectivamente equiángulos, esto es cuyos ángulos sólidos son entre sí iguales, están uno a otro en la razón compuesta de las razones de sus lados» (Cf. SIMSON, *op. cit.*, pág. 232, prop. D).

Formen, pues, en primer lugar, ángulos rectos con sus bases las aristas laterales AH, EZ, ΛB, ΘK, ΓM, NΞ, OΔ, ΠP.

Digo que como la base EΘ es a la base NΠ, así ΓM a AH.

Así pues, si la base EΘ es igual a la base NΠ y el sólido AB es igual al sólido ΓΔ, ΓM será también igual a AH: porque los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases [XI 32]. Y como la base EΘ es a la (base) NΠ, así ΓM a AH, y está claro que las bases de los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ están inversamente relacionadas con sus alturas.

Ahora no sea igual la base EΘ a la base NΠ, sino que es mayor EΘ. Pero el sólido AB es igual al sólido ΓΔ, entonces ΓM es también mayor que AH. Así pues, hágase ΓT igual a AH y complétese, sobre la base NΠ y con la altura ΓT, el sólido paralelepípedo ΦΓ. Y como el sólido AB es igual al sólido ΓΔ y el (sólido) ΓΦ está fuera y las (magnitudes) iguales guardan la misma razón con una misma (magnitud) [V 7], entonces, como el sólido AB es al sólido ΓΦ, así el sólido ΓΔ al sólido ΓΦ. Pero como el sólido AB es al sólido ΓΦ, así la base EΘ a la base NΠ: porque los sólidos AB, ΓΦ son de la misma altura [XI 32]; pero como el sólido ΓΔ es al sólido ΓΦ, así la base MΠ a la base TΠ [XI 25] y ΓM a ΓT [VI 1]; luego como la base EΘ es a la base NΠ, así MΓ a ΓT. Pero ΓT es igual a AH; entonces, como la base EΘ es a la base NΠ, así MΓ a AH. Luego las bases de los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ están inversamente relacionadas con las alturas.

Estén, ahora, las bases de los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ inversamente relacionadas con sus alturas, (es decir que) como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido AB.

Digo que el sólido AB es igual al sólido ΓΔ.

Formen, a su vez, las aristas laterales ángulos rectos con las bases. Y si la base EΘ es igual a la base NΠ, y como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del só-

lido AB, entonces la altura del sólido ΓΔ es igual a la altura del sólido AB. Pero los sólidos paralelepípedos que están sobre bases iguales y tienen la misma altura son iguales entre sí [XI 31]: luego el sólido AB es igual al sólido ΓΔ.

Ahora no sea la base EΘ igual a la base NΠ, sino que EΘ sea mayor. Entonces la altura del sólido ΓΔ es también mayor que la altura del sólido AB, es decir ΓM (mayor) que AH. Hágase de nuevo ΓT igual a AH, y complétese de manera semejante el sólido ΓΦ. Y puesto que, como la base EΘ es a la base NΠ, así MΓ a AH, y AH es igual a ΓT, entonces, como la base EΘ es a la base NΠ, así ΓM a ΓT. Pero como la (base) EΘ es a la base NΠ, así el sólido AB al sólido ΓΦ: porque los sólidos AB, ΓΦ son de la misma altura [XI 32]. Y como ΓM es a ΓT, así la base MΠ a la base ΠT [VI 1] y el sólido ΓΔ al sólido ΓΦ; y como el sólido AB es al sólido ΓΦ, así el sólido ΓΔ al sólido ΓΦ; luego cada uno de los (sólidos) AB, ΓΔ guarda la misma razón con ΓΦ. Por tanto, el sólido AB es igual al sólido ΓΔ [V 9].

Ahora no formen las aristas laterales ZE, BΛ, HA, ΘK, ΞN, ΔO, MΓ, PΠ ángulos rectos con sus bases y trácense, desde los puntos Z, H, B, K, Ξ, M, Δ, P, perpendiculares a los planos que pasan por EΘ, NΠ, y únanse con los planos en los (puntos) Σ, T, Y, Φ, X, Ω, Ψ, ς, y complétense los sólidos ZΦ, ΞΩ.

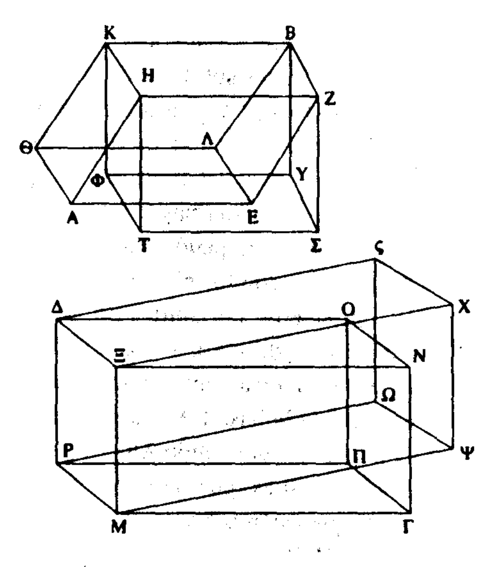
Digo que también en este caso, si los sólidos AB, ΓΔ son iguales, sus bases están inversamente relacionadas con sus alturas, (es decir que) como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido AB.

Puesto que el sólido AB es igual al sólido ΓΔ, mientras que AB es igual a BT: porque están sobre la misma base, ZK, y tienen la misma altura [XI 29, 30]; pero el sólido ΓΔ es igual al sólido ΔΨ: porque están, a su vez, sobre la misma base PΞ y tienen la misma altura [id.]. Entonces, el sólido BT es igual al sólido ΔΨ; por tanto, como la base ZK es a la base ΞP, así la altura del sólido ΔΨ a la altura del sólido BT [1ª parte]. Pero la base

ΖΚ es igual a la base ΕΘ y la base ΞΡ a la base ΝΠ; entonces, como la base ΕΘ es a la base ΝΠ, así la altura del sólido ΔΨ a la altura del sólido ΒΤ. Pero las alturas de los sólidos ΔΨ, ΒΤ son las mismas que las de ΔΓ, ΒΑ; luego como la base ΕΘ es a la base ΝΠ, así la altura del sólido ΔΓ a la altura del sólido ΑΒ. Por tanto, las bases de los sólidos paralelepípedos ΑΒ, ΓΔ están inversamente relacionadas con sus alturas.

Ahora estén inversamente relacionadas con sus alturas las bases de los sólidos ΑΒ, ΓΔ (es decir que) como la base ΕΘ es a la base ΝΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido ΑΒ.

Digo que el sólido ΑΒ es igual al sólido ΓΔ.



Pues, siguiendo la misma construcción, dado que, como la base ΕΘ es a la base ΝΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido ΑΒ, y la base ΕΘ es igual a la base ΖΚ, mientras que la (base) ΝΠ es igual a la base ΞΡ, entonces, como la base ΖΚ es a la base ΞΡ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido

AB. Pero los sólidos AB, ΓΔ y los sólidos BT, ΔΨ tienen las mismas alturas (respectivamente), entonces, como la base ZK es a la base ΞP, así la altura del sólido ΔΨ es a la altura del sólido BT. Luego las bases de los sólidos paralelepípedos BT, ΔΨ están inversamente relacionadas con sus alturas. Por tanto, el sólido BT es igual al sólido ΔΨ [1ª parte]. Pero el (sólido) BT es igual al sólido BA: porque están sobre la misma base, ZK, y tienen la misma altura [XI 29, 30]. Y el sólido ΔΨ es igual al sólido ΔΓ [id.].

Por consiguiente, el sólido AB es igual al sólido ΓΔ. Q. E. D.[62].

Proposición 35

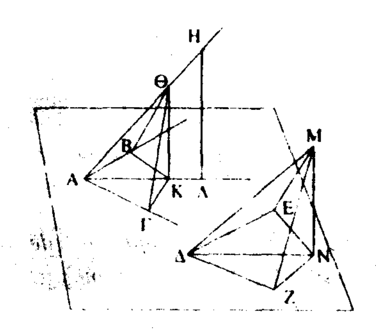
Si hay dos ángulos planos iguales y se levantan desde sus vértices rectas elevadas que comprendan ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, y se toman unos puntos al azar en las rectas elevadas y, desde ellos, se trazan perpendiculares a los planos en los que están los ángulos iniciales y se trazan rectas de los puntos producidos en los planos a los (vértices de) los ángulos iniciales, (éstos) comprenderán con las rectas elevadas ángulos iguales[63].

Sean BAΓ, EΔZ dos ángulos rectilíneos iguales y levántense desde los puntos A, Δ, las rectas elevadas AH, ΔM que compren-

[62] Euclides asume sin prueba: a) que si dos paralelepípedos son iguales y tienen bases iguales, sus alturas son iguales, y b) que, si las bases de dos paralelepípedos iguales son desiguales, el que tiene la base mayor, tiene la altura menor (Cf. HEATH, *op. cit.*, pág. 349).

[63] Este largo enunciado se podría sintetizar de la siguiente manera: «En dos ángulos triedros iguales cada par de aristas homólogas forman ángulos iguales con el plano de las otras dos.»

dan con las rectas iniciales ángulos iguales respectivamente, a saber: el (ángulo) MΔE (igual) al (ángulo) HAB y el (ángulo) MΔZ al (ángulo) HAΓ; tómense al azar los puntos H, M en las rectas AH, ΔM, y trácense de los puntos H, M a los planos que pasan por BAΓ, EΔZ, las perpendiculares HΛ, MN y únanse a los planos en los (puntos) N, Λ, y trácense ΛA, NΔ.



Digo que el ángulo HAΛ es igual al ángulo MΔN.

Hágase AΘ igual a ΔM, y trácese por el punto Θ la (recta) ΘK paralela a HΛ. Pero HΛ es perpendicular al plano que pasa por BAΓ; entonces ΘK también es perpendicular al plano que pasa por BAΓ [XI 8]. Trácense desde los puntos K, N las perpendiculares KΓ, NZ, KB, NE a las rectas AB, AΓ, ΔZ, ΔE y trácense ΘΓ, ΓB, MZ, ZE. Puesto que el (cuadrado) de ΘA es igual a los (cuadrados) de ΘK, KA y los (cuadrados) de KΓ, ΓA son iguales al de KA [I 47], entonces el (cuadrado) de ΘA también es igual a los de ΘK, KΓ, ΓA. Pero el (cuadrado) de ΘΓ es igual a los de ΘK, KΓ [I 47]; entonces el (cuadrado) de ΘA es igual a los de ΘΓ, ΓA. Luego el ángulo ΘΓA es recto [I 48]. Por lo mismo el ángulo ΔZM también es recto. Por tanto, el ángulo AΓΘ es igual al ΔZM. Pero el (ángulo) ΘAΓ es igual al ángulo MΔZ. Luego MΔZ, ΘAΓ son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente y un lado igual a un lado, el que subtiende uno de los ángulos iguales, es decir:

el (lado) ΘΑ (que es igual) a ΜΔ; entonces tendrán los lados restantes iguales respectivamente a los lados restantes [I 26]. Por tanto, ΑΓ es igual a ΔΖ. De manera semejante demostraríamos que ΑΒ también es igual a ΔΕ. Pues bien, como ΑΓ es igual a ΔΖ y ΑΒ a ΔΕ, entonces los dos (lados) ΓΑ, ΑΒ son iguales a los dos lados ΖΔ, ΔΕ. Pero el ángulo ΓΑΒ es igual también al ángulo ΖΔΕ; entonces la base ΒΓ es igual a la base ΕΖ y el triángulo al triángulo y los ángulos restantes a los ángulos restantes [I 4]; por tanto, el ángulo ΑΓΒ es igual al ΔΖΕ. Pero el ángulo recto ΑΓΚ es igual al (ángulo) recto ΔΖΝ. Entonces el (ángulo) restante ΒΓΚ es también igual al (ángulo) restante ΕΖΝ. Por lo mismo, el (ángulo) ΓΒΚ es igual al (ángulo) ΖΕΝ. Luego ΒΓΚ, ΕΖΝ son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente y un lado a un lado, el correspondiente a los ángulos iguales, es decir ΒΓ (que es igual) a ΕΖ; entonces tendrán los lados restantes iguales a los lados restantes [I 26]. Luego ΓΚ es igual a ΖΝ. Pero ΑΓ es también igual a ΔΖ; luego los dos (lados) ΑΓ, ΓΚ son iguales a los dos (lados) ΔΖ, ΖΝ; y comprenden ángulos rectos. Por tanto, la base ΑΚ es igual a la base ΔΝ [I 4]. Y como ΑΘ es igual a ΔΜ, el (cuadrado) de ΑΘ es igual al (cuadrado) de ΔΜ. Pero los (cuadrados) de ΑΚ, ΚΘ son iguales al (cuadrado) de ΑΘ, porque el (ángulo) ΑΚΘ es recto [I 47]; y los (cuadrados) de ΔΝ, ΝΜ son iguales al (cuadrado) de ΔΜ, porque el ángulo ΔΝΜ es recto [I 47]. Entonces los (cuadrados) de ΑΚ, ΚΘ son iguales a los (cuadrados) de ΔΝ, ΝΜ y de ellos, el (cuadrado) de ΑΚ es igual al (cuadrado) de ΔΝ; luego el (cuadrado) restante de ΚΘ es igual al (cuadrado) de ΝΜ; por tanto, ΘΚ es igual a ΜΝ. Y como los dos (lados) ΘΑ, ΑΚ son iguales a los dos (lados) ΜΔ, ΔΝ respectivamente, y se ha demostrado que la base ΘΚ es igual a la base ΜΝ, entonces el ángulo ΘΑΚ es igual al ángulo ΜΔΝ [I 8].

Por consiguiente, si hay dos ángulos planos iguales, y lo que sigue del enunciado.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si hay dos ángulos planos iguales y se levantan desde ellos rectas iguales que comprendan ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, las perpendiculares trazadas desde (los extremos de) ellas hasta los planos en los que están los ángulos iniciales, son iguales entre sí. Q. E. D.

Proposición 36

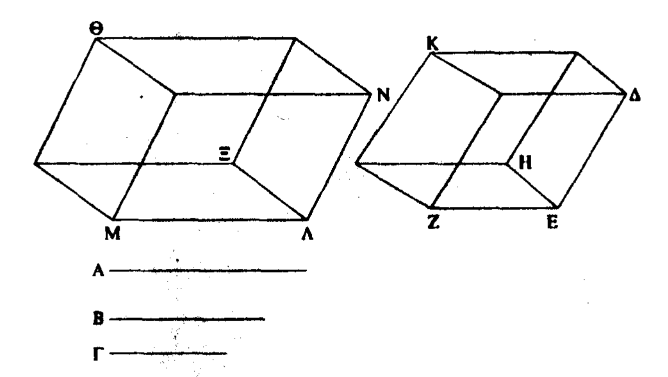
Si tres rectas son proporcionales, el sólido paralelepípedo (construido) a partir de ellas es igual al sólido paralelepípedo (construido) a partir de la media (proporcional), equilátero y equiangular con el antedicho sólido.

Sean proporcionales las tres rectas Α, Β, Γ, (es decir que) como Α es a Β, así Β a Γ.

Digo que el sólido (construido) a partir de Α, Β, Γ es igual al sólido (construido) a partir de Β, equilátero y equiangular con el antedicho.

Póngase el ángulo sólido correspondiente a Ε comprendido por los (ángulos) ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, y háganse las rectas ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ iguales a Β respectivamente y complétese el sólido paralelepípedo ΕΚ; hágase ΛΜ igual a Α y constrúyase sobre la recta ΛΜ y en su punto Λ un ángulo sólido igual al ángulo sólido correspondiente a Ε, el comprendido por los (ángulos) ΝΛΞ, ΞΛΜ, ΜΛΝ; hágase ΛΞ igual a Β y ΛΝ igual a Γ. Y dado que, como Α es a Β, así Β a Γ, y Α es igual a ΛΜ, y Β a cada una de las (rectas) ΛΞ, ΕΔ, y Γ a ΛΝ; entonces, como ΛΜ es a ΕΖ, así ΔΕ a ΛΝ. Y los lados que comprenden los ángulos iguales ΝΛΜ, ΔΕΖ están inversamente relacionados; entonces, el paralelogramo ΜΝ es igual al paralelogramo ΔΖ [VI 14]. Aho-

ra bien, como ΔEZ, NΛM son dos ángulos planos rectilíneos iguales y se han levantado sobre ellos las rectas ΔΞ, EH iguales entre sí y que comprenden ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, entonces las perpendiculares trazadas

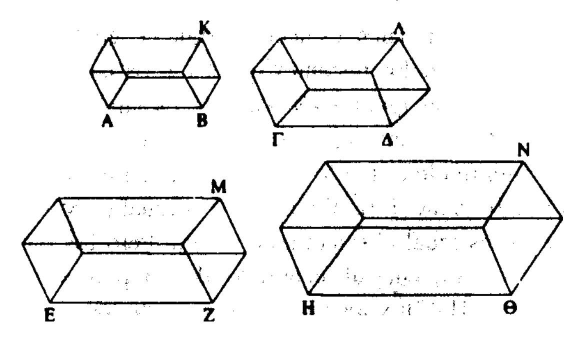


de los puntos H, Ξ a los planos que pasan por NΛM, ΔEZ son iguales entre sí [XI 35 Por.]; de modo que los sólidos ΛΘ, EK tienen la misma altura. Pero los sólidos paralelepípedos que están sobre bases iguales y (tienen) la misma altura son iguales entre sí [XI 31]; luego el sólido ΘΛ es igual al sólido EK. Y ΛΘ es el sólido (construido) a partir de A, B, Γ, y EK el sólido (construido) a partir de B; por tanto, el sólido paralelepípedo (construido) a partir de A, B, Γ es igual al sólido (construido) a partir de B, equilátero y equiangular con el (sólido) antedicho. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 37

Si cuatro rectas son proporcionales, los sólidos paralelepípedos semejantes y construidos de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si los sólidos paralelepípedos semejantes y construidos de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, también las propias rectas serán proporcionales.

Sean proporcionales las cuatro rectas AB, ΓΔ, EZ, HΘ, (es decir que) como AB es a ΓΔ, así EZ a HΘ, y constrúyanse a partir de AB, ΓΔ, EZ, HΘ los sólidos paralelepípedos KA, ΛΓ, ME, NH semejantes y situados de manera semejante.



Digo que, como KA es a ΛΓ, así ME a NH.

Pues dado que el sólido paralelepípedo KA es semejante al (sólido paralelepípedo) ΛΓ, entonces KA guarda con ΛΓ una razón triplicada de la que AB guarda con ΓΔ [XI 33]. Por lo mismo, ME guarda con NH una razón triplicada de la que EZ guarda con HΘ [id.]. Y como AB es a ΓΔ, así EZ a HΘ. Entonces, como AK es a ΛΓ, así ME a NH.

Pero ahora, como el sólido AK es al sólido ΛΓ, sea así el sólido ME al sólido NH.

Digo que, como la recta AB es a la (recta) ΓΔ, así la (recta) EZ a la (recta) HΘ.

Pues dado que KΛ guarda a su vez con ΛΓ una razón triplicada de la que AB guarda con ΓΔ [XI 33], y ME guarda también con NH una razón triplicada de la que EZ guarda con HΘ [id.], y como KΛ es a ΛΓ, así ME a NH, entonces, como AB es a ΓΔ, así EZ a HΘ.

Por consiguiente, si cuatro rectas son proporcionales y lo que sigue del enunciado. Q. E. D.[64].

Proposición 38

Si los lados de los planos opuestos de un cubo se dividen en dos partes iguales y se trazan planos a través de las secciones, la sección común de los planos y el diámetro del cubo se dividen mutuamente en dos partes iguales.

Divídanse en dos, pues, los lados de los planos opuestos ΓZ, AΘ, del cubo AZ por los puntos K, Λ, M, N, Ξ, Π, O, P, y trácense los planos KN, ΞP a través de las secciones, y sea YΣ la sección común y ΔH la diagonal del cubo.

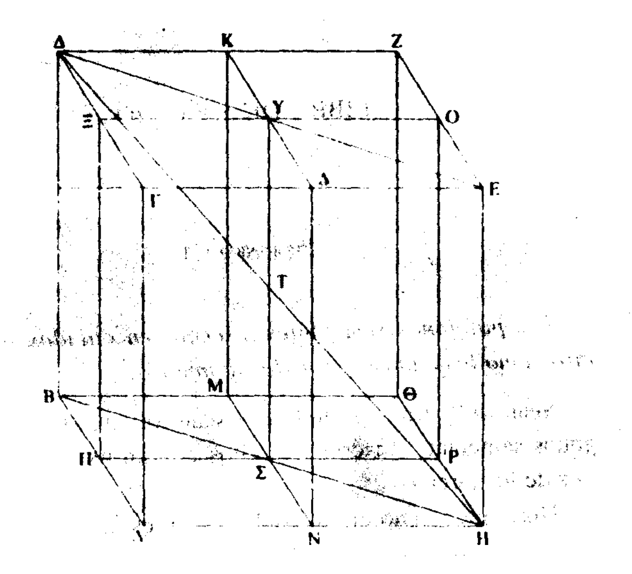
Digo que YT es igual a TΣ y ΔT a TH.

Pues trácense ΔY, YE, BΣ, ΣH. Y como ΔΞ es paralela a OE, los ángulos alternos ΔΞY, YOE son iguales entre sí [I 29]. Y como ΔΞ es igual a OE y ΞY a YO y comprenden ángulos igua-

[64] En esta proposición se asume que, si dos razones son iguales, la razón triplicada de una es igual a la razón triplicada de la otra, y a la inversa: si las razones triplicadas de otras dos razones son iguales, esas otras razones son iguales.

Por otra parte, Simson adopta la prueba alternativa que se encuentra en el manuscrito b. Esta demostración es aceptada también por Clavio que además aduce la prueba que Heiberg considera genuina atribuyéndola a Teón.

les, entonces la base ΔΥ es igual a la base ΥΕ y el triángulo ΔΞΥ es igual al triángulo ΟΥΕ y los ángulos restantes son iguales a los ángulos restantes [I 4]. Luego el ángulo ΞΥΔ es igual al ángulo ΟΥΕ. Por eso ΔΥΕ es una recta [I 14]. Por lo mismo ΒΣΗ es



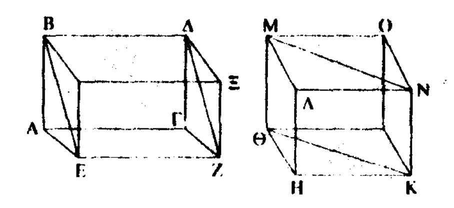
también una recta, y ΒΣ es igual a ΣΗ. Y como ΓΑ es igual y paralela a ΔΒ, mientras que ΓΑ también es igual y paralela a ΕΗ, entonces ΔΒ es igual y paralela a ΕΗ [XI 9]. Y las rectas ΔΕ, ΒΗ las unen; luego ΔΕ es paralela a ΒΗ [I, 33]. Por tanto, el ángulo ΕΔΤ es igual al (ángulo) ΒΗΤ, porque son alternos [I 29]; y el (ángulo) ΔΤΥ es igual al (ángulo) ΗΤΣ [I 15]. Entonces ΔΤΥ, ΗΤΣ son dos triángulos que tienen dos ángulos (del uno) iguales a dos ángulos (del otro) y un lado igual a un lado, el que subtiende a uno de los ángulos iguales, ΔΥ (que es igual) a ΗΣ, porque son mitades de ΔΕ, ΒΗ; y tendrán también los lados restantes iguales a los lados restantes [I 26]. Por tanto, ΔΤ es igual a ΤΗ y ΥΤ a ΤΣ.

Por consiguiente, si se dividen en dos partes iguales los lados de los planos opuestos de un cubo, y se trazan planos a través de las secciones, la sección común de los planos y el diámetro del cubo se dividen mutuamente en dos partes iguales. Q. E. D.

Proposición 39

Si dos prismas tienen la misma altura y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo y el paralelogramo es el doble del triángulo, los prismas serán iguales.

Sean ABΓΔEZ, HΘKΛMN dos prismas de la misma altura y tenga el primero como base el paralelogramo AZ, y el segundo el triángulo HΘK. Y sea el paralelogramo AZ el doble del triángulo HΘK.



Digo que el prisma ABΓΔEZ es igual al prisma HΘKΛMN.

Complétense, pues, los sólidos AΞ, HO. Como el paralelogramo AZ es el doble del triángulo HΘK, y el paralelogramo ΘK el doble del triángulo HΘK [I 34], entonces el paralelogramo AZ es igual al paralelogramo ΘK. Pero los sólidos paralelepípedos que están sobre bases iguales y tienen la misma altura son iguales entre sí [XI 31]; luego el sólido AΞ es igual al sólido HO. Y el prisma ABΓΔEZ es la mitad del sólido AΞ y el prisma

HΘΚΛΜΝ, la mitad del sólido HO [XI 28]; por tanto, el prisma ΑΒΓΔΕΖ es igual al prisma HΘΚΛΜΝ.

Por consiguiente, si dos prismas tienen la misma altura y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo y el paralelogramo es el doble del triángulo, los prismas son iguales. Q. E. D.

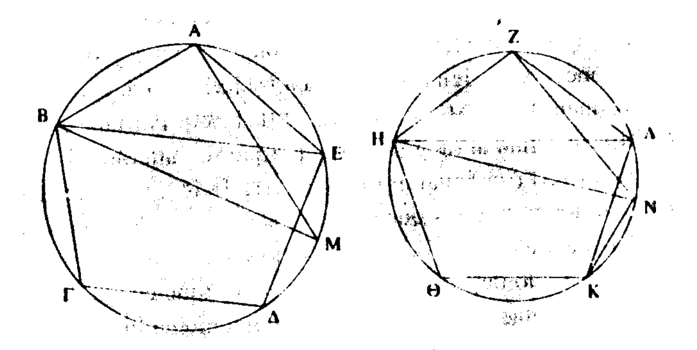
LIBRO DUODÉCIMO

PROPOSICIÓN 1

Los polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de los diámetros.

Sean ABΓ, ZHΘ los círculos y sean ABΓΔE, ZHΘKΛ los polígonos semejantes inscritos en ellos, y sean BM, HN los diámetros de los círculos.

Digo que, como el cuadrado de BM es al cuadrado de HN, así el polígono ABΓΔE al polígono ZHΘKΛ.



Trácense, pues, BE, AM, HΛ, ZN. Y como el polígono ABΓΔE es semejante al polígono ZHΘKΛ, el ángulo BAE es igual al (án-

gulo) HZΛ, y como BA es a AE, así HZ a ZΛ [VI Def. 1]. Entonces BAE, HZΛ son dos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro) —el ángulo BAE al ángulo HZΛ— y los lados que comprenden los ángulos iguales, proporcionales; luego los triángulos ABE, HZΛ son equiangulares [VI 6]. Por tanto, el ángulo AEB es igual al (ángulo) ZΛH. Pero el (ángulo) AEB es igual al (ángulo) AMB: porque están sobre la misma circunferencia [III 27][65]; y el (ángulo) ZΛH es igual al (ángulo) ZNH; entonces el (ángulo) AMB es también igual al (ángulo) ZNH. Pero el (ángulo) recto BAM es igual al (ángulo) recto HZN [III 31]; luego el (ángulo) restante es igual al (ángulo) restante [I 32]. Por tanto, los triángulos ABM, ZHN son equiangulares. Luego, proporcionalmente, como BM es a HN, así BA a HZ [VI 4]. Pero el cuadrado de BM guarda con el cuadrado de HN una razón duplicada de la que BM guarda con HN, y el polígono ABΓΔE guarda con el polígono ZHΘKΛ una razón duplicada de la que BA guarda con HZ [VI 20]; entonces, como el cuadrado de BM es al cuadrado de HN, así el polígono ABΓΔE es al polígono ZHΘKΛ.

Por consiguiente, los polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de los diámetros. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 2

Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros.

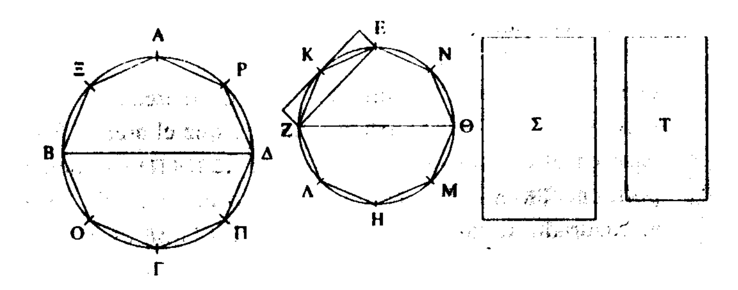
Sean ABΓΔ, EZHΘ los círculos y BΔ, ZΘ sus diámetros.

Digo que, como el círculo ABΓΔ es al círculo EZHΘ, así el cuadrado de BΔ al cuadrado de ZΘ.

[65] Cf. EUCLIDES, *Elementos I-IV*, nota 84, pág. 292.

Pues si el círculo ΑΒΓΔ no fuera al (círculo) ΕΖΗΘ como el cuadrado de ΒΔ es al (cuadrado) de ΖΘ, (entonces), como el (cuadrado) de ΒΔ es al (cuadrado) de ΖΘ, así será el círculo ΑΒΓΔ a un área menor que el círculo ΕΖΗΘ o a una mayor.

Séalo en primer lugar a un área menor Σ; inscríbase el cuadrado ΕΖΗΘ en el círculo ΕΖΗΘ; entonces el cuadrado inscrito



es mayor que la mitad del círculo ΕΖΗΘ; porque si trazamos tangentes al círculo por los puntos Ε, Ζ, Η, Θ, el cuadrado ΕΖΗΘ es la mitad del cuadrado circunscrito en torno al círculo y el círculo es menor que el cuadrado circunscrito; de modo que el cuadrado inscrito ΕΖΗΘ es mayor que la mitad del círculo ΕΖΗΘ. divídanse en dos partes iguales las circunferencias ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ por los puntos Κ, Λ, Μ, Ν, y trácense ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ; entonces cada uno de los triángulos ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ es mayor que la mitad del segmento de círculo en que se halla: porque si trazamos tangentes al círculo por los puntos Κ, Λ, Μ, Ν, y completamos los paralelogramos sobre las (rectas) ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ, cada uno de los triángulos ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ será la mitad del paralelogramo en que se halla; pero el segmento en que se halla es menor que el paralelogramo, de modo que cada uno de los triángulos ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ es mayor que la mitad del segmento de círculo en que se halla. Entonces, si dividimos en dos las restantes circunferencias y trazamos rectas y procedemos así sucesivamente, dejare-

mos ciertos segmentos de círculo que serán menores que el exceso con que el círculo EZHΘ excede al área Σ: pues se ha demostrado en el primer teorema del libro X que, si se ponen dos magnitudes desiguales y se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, (se quita) una (magnitud) mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Quede, pues (como se ha dicho), y sean EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE los segmentos del círculo EZHΘ menores que el exceso con que el círculo EZHΘ excede al área Σ. Entonces el polígono restante EKZΛHMΘN es mayor que el área Σ. E inscríbase en el círculo ABΓΛ el polígono AΞBOΓΠΔP semejante al polígono EKZΛHMΘN; entonces, como el cuadrado de BΔ es al cuadrado de ZΘ, así el polígono AΞBOΓΠΔP es al polígono EKZΛHMΘN [XII 1]. Pero también, como el cuadrado de BΔ es al (cuadrado) de ZΘ, así el círculo ABΓΔ es al área Σ; entonces, como el círculo ABΓΔ es al área Σ, así el polígono AΞBOΓΠΔP es al polígono EKZΛHMΘN [V 11]; luego, por alternancia, como el círculo ABΓΔ es al polígono inscrito en él, así el área Σ al polígono EKZΛHMΘN [V 16]. Pero el círculo ABΓΔ es mayor que el polígono inscrito en él; entonces Σ también es mayor que el polígono EKZΛHMΘN. Pero también es menor; lo cual es imposible. Luego el círculo ABΓΔ no es a un área menor que el círculo EZHΘ como el cuadrado de BΔ es al cuadrado de ZΘ. De manera semejante demostraríamos que el círculo EZHΘ tampoco es a un área menor que el círculo ABΓΔ como el cuadrado de ZΘ es al cuadrado de BΔ.

Digo ahora que el cuadrado de BΔ tampoco es al cuadrado de ZΘ como el círculo ABΓΔ a un área mayor que el círculo EZHΘ.

Pues, si fuera posible, séalo a un (área) mayor Σ. Entonces, por inversión, como el cuadrado de ZΘ es al cuadrado ΔB, así el área Σ al círculo ABΓΔ. Ahora bien, como el área Σ es al círculo

ABΓΔ, así el círculo EZHΘ a un área menor que el círculo ABΓΔ; entonces, como el cuadrado de ZΘ es al cuadrado de BΔ, así el círculo EZHΘ a un área menor que el círculo ABΓΔ [V 11]; lo cual se ha demostrado que es imposible. Por tanto, el círculo ABΓΔ no es a un área mayor que el círculo EZHΘ como el cuadrado de BΔ es al cuadrado de ZΘ. Pero se ha demostrado que tampoco a un área menor; por tanto, como el cuadrado de BΔ es al cuadrado de ZΘ, así el círculo ABΓΔ al círculo EZHΘ.

Por consiguiente, los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros. Q. E. D.[66].

LEMA

Digo ahora que, si el área Σ es mayor que el círculo EZHΘ, como el área Σ es al círculo ABΓΔ, así el círculo EZHΘ a un área menor que el círculo ABΓΔ.

Pues, como el área Σ es al círculo ABΓΔ, sea así el círculo EZHΘ al área T.

Digo que el área T es menor que el círculo ABΓΔ. Porque, efectivamente, como el área Σ es al círculo ABΓΔ, así el círculo EZHΘ al área T, luego, por alternancia, como el área Σ es al círculo EZHΘ, así el círculo ABΓΔ al área T [V 16]. Y el área Σ es mayor que el círculo EZHΘ; por tanto, el círculo ABΓΔ tam-

[66] La tradición ha atribuido la prueba de este teorema a Hipócrates. Sin embargo parece más verosímil atribuir su conocimiento a Eudoxo a juzgar por la referencia expresa de Arquímedes que remite a Eudoxo los resultados de XII, 7 Por. y XII 10. Lo esencial en esta proposición es probar que se puede utilizar el método de exhausción con un círculo en el sentido de X 1, inscribiendo sucesivamente en él polígonos regulares cada uno de los cuales tiene el doble de lados que el precedente. Pueden verse más detalles sobre esta prueba concreta y sobre el mal llamado método «de exhausción» en general, en L. VEGA, *La trama de la demostración*, págs. 352-55. Recientemente ha vuelto sobre el uso euclídeo de la exhausción en el contexto del libro XII J. L. GARDIES, «L'organisation du libre XII des *Eléments* d'Euclides et ses anomalies», *Révue d'Histoire des Sciences*, XLVII/2 (1994), 189-208.

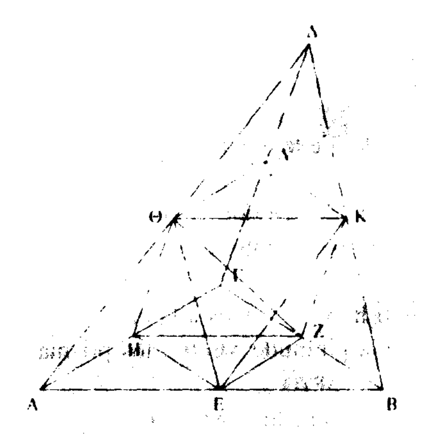
bién es mayor que el área T. De modo que, como el área Σ es al círculo ΑΒΓΔ, así el círculo ΕΖΗΘ a un área menor que el círculo ΑΒΓΔ. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 3

Toda pirámide que tiene como base un triángulo se divide en dos pirámides iguales, semejantes una a otra y a la (pirámide) entera, que tienen triángulos como bases, y se divide en dos prismas iguales; y los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera.

Sea una pirámide cuya base es el triángulo ΑΒΓ y su vértice el punto Δ.

Digo que la pirámide ΑΒΓΔ se divide en dos pirámides iguales una a otra que tienen triángulos como bases y semejan-



tes a la pirámide entera, y en dos prismas iguales; y que los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera.

Divídanse, pues, en dos partes iguales ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ por los puntos Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ; y trácense ΘΕ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΚΖ, ΖΗ. Puesto que ΑΕ es igual a ΕΒ y ΑΘ es igual a ΔΘ, entonces ΕΘ es paralela a ΔΒ [VI 2]. Por lo mismo, ΘΚ es también paralela a ΑΒ. Entonces ΘΕΒΚ es un paralelogramo; luego ΘΚ es igual a ΕΒ [I 34]. Pero ΕΒ es igual a ΕΑ; por tanto, ΑΕ es también igual a ΘΚ. Pero ΑΘ es igual a ΘΔ; entonces las dos (rectas) ΕΑ, ΑΘ son iguales respectivamente a las dos (rectas) ΚΘ, ΘΔ; y el ángulo ΕΑΘ es igual al ángulo ΚΘΔ; así pues, la base ΕΘ es igual a la base ΚΔ [I 4]. Luego el triángulo ΑΕΘ es igual y semejante al triángulo ΘΚΔ. Por lo mismo, el triángulo ΑΘΗ es también igual y semejante al triángulo ΘΛΔ. Y como las dos rectas que se tocan ΕΘ, ΘΗ, son paralelas a las dos rectas que se tocan ΚΔ, ΔΛ y no están en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales [XI 10]. Entonces, el ángulo ΕΘΗ es igual al ángulo ΚΔΛ. Y como las dos rectas ΕΘ, ΘΗ son iguales respectivamente a las dos (rectas) ΚΔ, ΔΛ, y el ángulo ΕΘΗ es igual al ángulo ΚΔΛ, entonces la base ΕΗ es igual a la base ΚΛ [I 4]; luego el triángulo ΕΘΗ es igual y semejante al triángulo ΚΔΛ. Por lo mismo, el triángulo ΑΕΗ es también igual y semejante al triángulo ΘΚΛ. Por tanto, la pirámide cuya base es el triángulo ΑΕΗ y su vértice el punto Θ es también igual y semejante a la pirámide cuya base es el triángulo ΘΚΛ y su vértice el punto Δ [XI Def. 10]. Y puesto que ΘΚ ha sido trazada paralela a uno de los lados del triángulo ΑΔΒ, el (lado) ΑΒ, los triángulos ΑΔΒ, ΔΘΚ son equiangulares [I 29] y tienen los lados proporcionales; luego el triángulo ΑΔΒ es semejante al triángulo ΔΘΚ [VI Def. 1]. Por lo mismo, el triángulo ΔΒΓ es semejante al triángulo ΔΚΛ y el (triángulo) ΑΔΓ al (triángulo) ΔΛΘ. Ahora bien, como las dos rectas que se tocan, ΒΑ, ΑΓ, son paralelas a las dos rectas que se tocan, ΚΘ, ΘΛ, y no están en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales [XI 10]. Entonces el ángulo ΒΑΓ es igual al ángulo ΚΘΛ. Y como ΒΑ es a ΑΓ, así ΚΘ a

ΘΛ; luego el triángulo ΑΒΓ es semejante al triángulo ΘΚΛ. Por tanto, la pirámide cuya base es el triángulo ΑΒΓ y su vértice el punto Δ es semejante a la pirámide cuya base es el triángulo ΘΚΛ y su vértice el punto Δ. Pero se ha demostrado que la pirámide cuya base es el triángulo ΘΚΛ y su vértice el punto Δ es semejante a la pirámide cuya base es el triángulo ΑΕΗ y su vértice el punto Θ. Por tanto, cada una de las pirámides ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ es semejante a la pirámide entera ΑΒΓΔ.

Ahora bien, como ΒΖ es igual a ΖΓ, el paralelogramo ΕΒΖΗ es el doble del triángulo ΗΖΓ. Y puesto que, si hay dos prismas de la misma altura, y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo, y el paralelogramo es el doble del triángulo, los prismas son iguales [XI 39], entonces el prisma comprendido por los dos triángulos ΒΚΖ, ΕΘΗ y los tres paralelogramos ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ es igual al prisma comprendido por los dos triángulos ΗΖΓ, ΘΚΛ y los tres paralelogramos ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ.

Y queda claro que cada uno de los prismas —a saber: aquel cuya base es el paralelogramo ΕΒΖΗ y ΘΚ su recta opuesta y aquel cuya base es el triángulo ΗΖΓ y ΘΚΛ su triángulo opuesto— es mayor que cada una de las pirámides cuyas bases son los triángulos ΑΕΗ, ΘΚΛ y sus vértices los puntos Θ, Δ; porque, si trazamos las rectas ΕΖ, ΕΚ, el prisma cuya base es el paralelogramo ΕΒΖΗ y ΘΚ su recta opuesta es mayor que la pirámide cuya base es el triángulo ΕΒΖ y su vértice el punto Κ. Pero la pirámide cuya base es el triángulo ΕΒΖ y su vértice el punto Κ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo ΑΕΗ y su vértice el punto Θ: porque están comprendidas por planos iguales y semejantes. De modo que el prisma cuya base es el paralelogramo ΕΒΖΗ y ΘΚ su recta opuesta es mayor que la pirámide cuya base es el triángulo ΑΕΗ y su vértice el punto Θ. Pero el prisma cuya base es el paralelogramo ΕΒΖΗ y ΘΚ su recta opuesta es igual al prisma cuya base es el triángulo ΗΖΓ y ΘΚΛ

su triángulo opuesto; y la pirámide cuya base es el triángulo AEH y su vértice el punto Θ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo ΘΚΛ y su vértice el punto Δ. Por tanto, los dos prismas antedichos son mayores que las dos pirámides antedichas cuyas bases son los triángulos AEH, ΘΚΛ y sus vértices los puntos Θ, Δ.

Por consiguiente, la pirámide entera cuya base es el triángulo ΑΒΓ y su vértice el punto Δ se ha dividido en dos pirámides iguales entre sí y en dos prismas iguales. Y los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera. Q. E. D.

Proposición 4

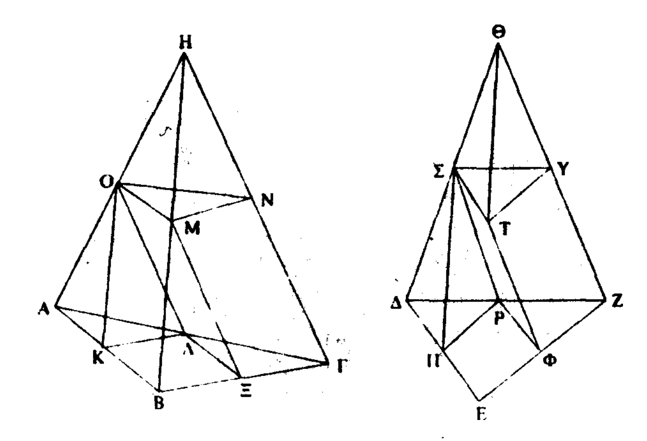
Si hay dos pirámides de la misma altura que tienen triángulos como bases, y cada una de ellas se divide en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a la pirámide entera y en dos prismas iguales; (entonces) como la base de una pirámide es a la base de la otra pirámide, así serán todos los prismas de una pirámide a todos los prismas iguales en número de la otra pirámide.

Sean dos pirámides de la misma altura que tienen como bases los triángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ, y como vértices los puntos Η, Θ; y divídase cada una de ellas en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a la (pirámide) entera, y en dos prismas iguales [XII 3].

Digo que, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así (son) todos los prismas de la pirámide ΑΒΓΗ a los prismas iguales en número de la pirámide ΔΕΖΘ.

Pues como ΒΞ es igual a ΞΓ y ΑΛ a ΛΓ, entonces ΛΞ es paralela a ΑΒ y el triángulo ΑΒΓ es semejante al triángulo ΛΞΓ; por lo mismo, el triángulo ΔΕΖ es también semejante al triángulo

ΡΦΖ. Y como ΒΓ es el doble de ΓΞ, mientras que ΕΖ es (el doble) de ΖΦ, entonces, como ΒΓ es a ΓΞ, así ΕΖ a ΖΦ. Ahora bien,



se han construido sobre ΒΓ, ΓΞ las figuras rectilíneas semejantes y situadas de manera semejante ΑΒΓ, ΛΞΓ, y sobre ΕΖ, ΖΦ las (figuras rectilíneas) semejantes y situadas de manera semejante ΔΕΖ, ΡΦΖ; luego, como el triángulo ΑΒΓ es al triángulo ΛΞΓ, así el triángulo ΔΕΖ al triángulo ΡΦΖ [VI 22]. Entonces, por alternancia, como el triángulo ΑΒΓ es al (triángulo) ΔΕΖ, así el (triángulo) ΛΞΓ es al triángulo ΡΦΖ [V 16]. Ahora bien, como el triángulo ΛΞΓ es al triángulo ΡΦΖ, así el prisma cuya base es el triángulo ΛΞΓ y su (triángulo) opuesto ΟΜΝ es al prisma cuya base es el triángulo ΡΞΖ y su (triángulo) opuesto ΣΤΥ [Lema subsiguiente a esta proposición]; entonces, como el triángulo ΑΒΓ es al triángulo ΔΕΖ, así el prisma cuya base es el triángulo ΛΞΓ y su (triángulo) opuesto ΟΜΝ al prisma cuya base es el triángulo ΡΦΖ y su (triángulo) opuesto ΣΤΥ. Pero, como los antedichos prismas son entre sí, así el prisma cuya base es el paralelogramo ΚΒΞΛ y su recta opuesta ΟΜ, al prisma cuya base es el paralelogramo ΠΕΦΡ y su recta opuesta ΣΤ [XI 39; XII 3]. Entonces los dos prismas, aquel cuya base es el

paralelogramo ΚΒΞΛ y su recta opuesta ΟΜ y aquel cuya base es el (triángulo) ΛΞΓ y su triángulo opuesto ΟΜΝ guardan la misma razón que los dos prismas, aquel cuya base es el (paralelogramo) ΠΕΦΡ y su recta opuesta ΣΤ y aquel cuya base es el (triángulo) ΡΦΖ y cuyo triángulo opuesto es ΣΤΥ [V 12]. Luego, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así los dos prismas a los (otros) dos prismas dichos.

Y de manera semejante, si las pirámides ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ se dividen en dos prismas y dos pirámides, como la base ΟΜΝ es a la base ΣΤΥ, así serán los dos prismas de la pirámide ΟΜΝΗ a los dos prismas de la pirámide ΣΤΥΘ. Ahora bien, como la base ΟΜΝ es a la base ΣΤΥ, así la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ: porque cada uno de los triángulos ΟΜΝ, ΣΤΥ son iguales respectivamente a los triángulos ΛΞΓ, ΡΦΖ. Por tanto, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así (son) los cuatro prismas a los cuatro prismas. De manera semejante, si dividimos las pirámides restantes en dos pirámides y dos prismas, entonces, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así serán todos los prismas de la pirámide ΑΒΓΗ a todos los prismas iguales en número de la pirámide ΔΕΖΘ. Q. E. D.

LEMA

Hay que demostrar como sigue que, como el triángulo ΛΞΓ es al triángulo ΡΦΖ, así el prisma cuya base es el triángulo ΛΞΓ y su triángulo opuesto ΟΜΝ al prisma cuya base es el (triángulo) ΡΦΖ y su triángulo opuesto ΣΤΥ.

Pues considérense en la misma figura las perpendiculares a los planos ΑΒΓ, ΔΕΖ desde los (puntos) Η, Θ que son iguales evidentemente porque se ha supuesto que las pirámides son de la misma altura. Y como las dos rectas ΗΓ y la perpendicular desde Η son cortadas por los planos paralelos ΑΒΓ, ΟΜΝ, serán cortadas en las mismas razones [XI 17]. Ahora bien, ΗΓ se ha dividido también en dos partes iguales por el plano ΟΜΝ en el

(punto) N; entonces la perpendicular desde H al plano ABΓ será dividida también en dos partes iguales por el plano OMN. Por lo mismo, la perpendicular desde Θ al plano ΔEZ se ha dividido en dos partes iguales por el plano ΣTY. Y las perpendiculares a los planos ABΓ, ΔEZ desde los puntos H, Θ son iguales; luego las perpendiculares a los (planos) ABΓ, ΔEZ desde los triángulos OMN, ΣTY son también iguales. Por tanto, los prismas cuyas bases son los triángulos ΛΞΓ, PΦZ y sus triángulos opuestos OMN, ΣTY son de la misma altura. De modo que los sólidos paralelepípedos descritos sobre dichos prismas son de la misma altura y son entre sí como sus bases [XI 32]; por tanto, sus mitades, dichos prismas, son entre sí como la base ΛΞΓ es a la base PΦZ. Q. E. D.

Proposición 5

Las pirámides que tienen la misma altura y tienen triángulos como bases son entre sí como sus bases.

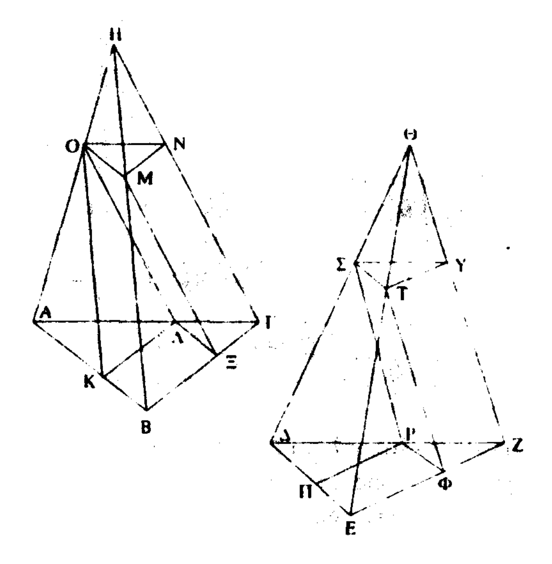
Sean de la misma altura las pirámides cuyas bases son los triángulos ABΓ, ΔEZ y sus vértices los puntos H, Θ.

Digo que, como la base ABΓ es a la base ΔEZ, así la pirámide ABΓH a la pirámide ΔEZΓ.

Pues, si la base ABΓ no es a la base ΔEZ como la pirámide ABΓH es a la pirámide ΔEZΘ, (entonces), como la base ABΓ es a la base ΔEZ, así será la pirámide ABΓH o bien a un (sólido) menor que la pirámide ΔEZH o bien a uno mayor.

Séalo, en primer lugar, a uno menor, X, y divídase la pirámide ΔEZΘ en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a la pirámide entera y en dos prismas iguales; entonces los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera [XII 3]. Y divídanse, a su vez, de manera semejante las pirámides

resultantes de la división y así sucesivamente hasta que, a partir de la pirámide ΔΕΖΘ, queden ciertas pirámides que sean me-

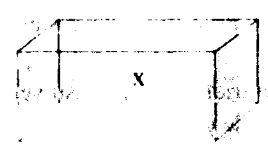


nores que el exceso con que la pirámide ΔΕΖΘ excede al sólido X [X 1]. Queden (tales pirámides) y sean las pirámides ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ por mor de la argumentación; entonces los prismas restantes de la pirámide ΔΕΖΘ son mayores que el sólido X. Divídase también la pirámide ΑΒΓΗ de manera semejante y el mismo número de veces que la pirámide ΔΕΖΘ. Entonces, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así los prismas de la pirámide ΑΒΓΗ a los prismas de la pirámide ΔΕΖΘ [XII 4]. Pero también, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así la pirámide ΑΒΓΗ al sólido X; luego como la pirámide ΑΒΓΗ es al sólido X, así los prismas de la pirámide ΑΒΓΗ a los prismas de la pirámide ΔΕΖΘ [V 11]; así pues, por alternancia, como la pirámide ΑΒΓΗ es a sus prismas, así el sólido X es a los prismas de la pirámide ΔΕΖΘ [V 16]. Pero la pirámide ΑΒΓΗ es mayor que sus prismas; entonces el

sólido X es mayor que los prismas de la pirámide ΔΕΖΘ. Pero también es menor; lo cual es imposible. Por tanto, la pirámide ΑΒΓΗ no es a un (sólido) menor que la pirámide ΔΕΖΘ como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ. De manera semejante se demostraría que la pirámide ΔΕΖΘ tampoco es a un sólido menor que la pirámide ΑΒΓΗ como la base ΔΕΖ es a la base ΑΒΓ.

Digo además que la pirámide ΑΒΓΗ tampoco es a un sólido mayor que la pirámide ΔΕΖΘ como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ.

Pues, si fuera posible, séalo al (sólido) mayor X; entonces, por inversión, como la base ΔΕΖ es a la base ΑΒΓ, así el sólido X a la pirámide ΑΒΓΗ. Pero como el sólido X es a la pirámide ΑΒΓΗ, así la pirámide ΔΕΖΘ a un (sólido) menor que la pirámide ΑΒΓΗ, como se ha demostrado anteriormente [XII 2 lema]. Entonces, como la base ΔΕΖ es a la base ΑΒΓ, así la pirámide ΔΕΖΘ a un (sólido) menor que la pirámide ΑΒΓΗ [V 11]; lo cual se ha demostrado que es absurdo; por tanto, la pirámide ΑΒΓΗ no es a un sólido mayor que la pirámide ΔΕΖΘ como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ. Pero se ha demostrado que tampoco es a uno menor. Por consiguiente, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así la pirámide ΑΒΓΗ a la pirámide ΔΕΖΘ. Q. E. D.



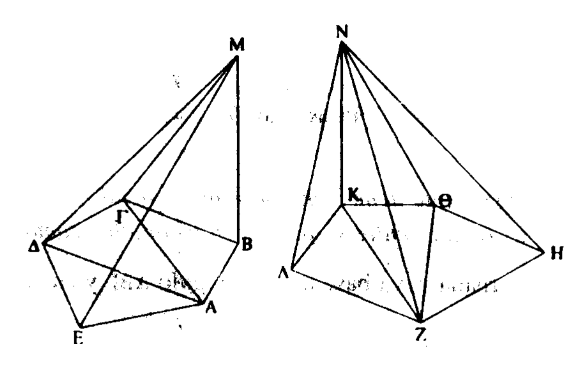
PROPOSICIÓN 6

Las pirámides que tienen la misma altura y tienen polígonos como bases son entre sí como sus bases.

Sean de la misma altura las pirámide cuyas bases son los polígonos ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ y sus vértices los puntos Μ, Ν.

Digo que como la base ΑΒΓΔΕ es a la base ΖΗΘΚΛ, así la pirámide ΑΒΓΔΕΜ a la pirámide ΖΗΘΚΛΝ.

Trácense, pues, las (rectas) AΓ, AΔ, ZΘ, ZK. Como en efecto ABΓM, AΓΔM son dos pirámides que tienen triángulos como ba-

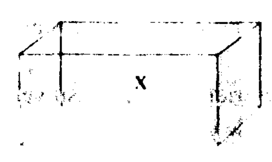


ses e igual altura, son entre sí como sus bases [XII 5]; entonces, como la base ABΓ es a la base AΓΔ, así la pirámide ABΓM es a la pirámide AΓΔM. Y, por composición, como la base ABΓΔ es a la base AΓΔ, así la pirámide ABΓΔM es a la pirámide AΓΔM [V 18]. Pero también, como la base AΓΔ es a la base AΔE, así la pirámide AΓΔM a la pirámide AΔEM [XII 5]. Luego, por igualdad, como la base ABΓΔ es a la base AΔE, así la pirámide ABΓΔM a la pirámide AΔEM [V 22]. Y de nuevo, por composición, como la base ABΓΔE es a la base AΔE, así la pirámide ABΓΔEM a la pirámide AΔEM [V 18]. De manera semejante se demostraría que también, como la base ZHΘKΛ es a la base ZHΘ, así la pirámide ZHΘKΛN a la pirámide ZHΘN. Y como AΔEM, ZHΘN son dos pirámides que tienen triángulos como bases e igual altura, entonces, como la base AΔE es a la base ZHΘ, así la pirámide AΔEM a la pirámide ZHΘN [XII 5]. Ahora bien, como la base AΔE es a la base ABΓΔE, así era la pirámide AΔEM a la pirámide ABΓΔEM. Luego, por igualdad, como la base ABΓΔE es a la base ZHΘ, así la pirámide ABΓΔEM a la pirámide ZHΘN [V 22]. Pero también, como la base ZHΘ es a la base ZHΘKΛ, así era la pirámide ZHΘN a la pirámide ZHΘKΛN. Por

sólido X es mayor que los prismas de la pirámide ΔΕΖΘ. Pero también es menor; lo cual es imposible. Por tanto, la pirámide ΑΒΓΗ no es a un (sólido) menor que la pirámide ΔΕΖΘ como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ. De manera semejante se demostraría que la pirámide ΔΕΖΘ tampoco es a un sólido menor que la pirámide ΑΒΓΗ como la base ΔΕΖ es a la base ΑΒΓ.

Digo además que la pirámide ΑΒΓΗ tampoco es a un sólido mayor que la pirámide ΔΕΖΘ como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ.

Pues, si fuera posible, séalo al (sólido) mayor X; entonces, por inversión, como la base ΔΕΖ es a la base ΑΒΓ, así el sólido X a la pirámide ΑΒΓΗ. Pero como el sólido X es a la pirámide ΑΒΓΗ, así la pirámide ΔΕΖΘ a un (sólido) menor que la pirámide ΑΒΓΗ, como se ha demostrado anteriormente [XII 2 lema]. Entonces, como la base ΔΕΖ es a la base ΑΒΓ, así la pirámide ΔΕΖΘ a un (sólido) menor que la pirámide ΑΒΓΗ [V 11]; lo cual se ha demostrado que es absurdo; por tanto, la pirámide ΑΒΓΗ no es a un sólido mayor que la pirámide ΔΕΖΘ como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ. Pero se ha demostrado que tampoco es a uno menor. Por consiguiente, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así la pirámide ΑΒΓΗ a la pirámide ΔΕΖΘ. Q. E. D.



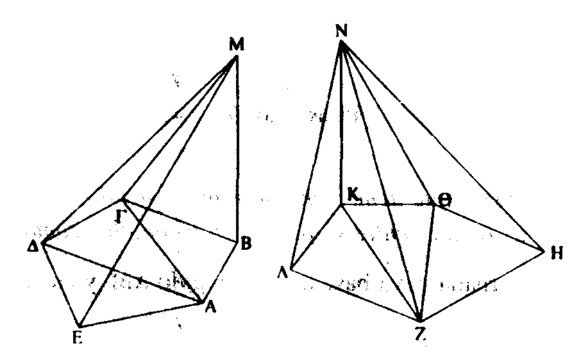
PROPOSICIÓN 6

Las pirámides que tienen la misma altura y tienen polígonos como bases son entre sí como sus bases.

Sean de la misma altura las pirámide cuyas bases son los polígonos ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ y sus vértices los puntos Μ, Ν.

Digo que como la base ΑΒΓΔΕ es a la base ΖΗΘΚΛ, así la pirámide ΑΒΓΔΕΜ a la pirámide ΖΗΘΚΛΝ

Trácense, pues, las (rectas) ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. Como en efecto ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ son dos pirámides que tienen triángulos como ba-



ses e igual altura, son entre sí como sus bases [XII 5]; entonces, como la base ΑΒΓ es a la base ΑΓΔ, así la pirámide ΑΒΓΜ es a la pirámide ΑΓΔΜ. Y, por composición, como la base ΑΒΓΔ es a la base ΑΓΔ, así la pirámide ΑΒΓΔΜ es a la pirámide ΑΓΔΜ [V 18]. Pero también, como la base ΑΓΔ es a la base ΑΔΕ, así la pirámide ΑΓΔΜ a la pirámide ΑΔΕΜ [XII 5]. Luego, por igualdad, como la base ΑΒΓΔ es a la base ΑΔΕ, así la pirámide ΑΒΓΔΜ a la pirámide ΑΔΕΜ [V 22]. Y de nuevo, por composición, como la base ΑΒΓΔΕ es a la base ΑΔΕ, así la pirámide ΑΒΓΔΕΜ a la pirámide ΑΔΕΜ [V 18]. De manera semejante se demostraría que también, como la base ΖΗΘΚΛ es a la base ΖΗΘ, así la pirámide ΖΗΘΚΛΝ a la pirámide ΖΗΘΝ. Y como ΑΔΕΜ, ΖΗΘΝ son dos pirámides que tienen triángulos como bases e igual altura, entonces, como la base ΑΔΕ es a la base ΖΗΘ, así la pirámide ΑΔΕΜ a la pirámide ΖΗΘΝ [XII 5]. Ahora bien, como la base ΑΔΕ es a la base ΑΒΓΔΕ, así era la pirámide ΑΔΕΜ a la pirámide ΑΒΓΔΕΜ. Luego, por igualdad, como la base ΑΒΓΔΕ es a la base ΖΗΘ, así la pirámide ΑΒΓΔΕΜ a la pirámide ΖΗΘΝ [V 22]. Pero también, como la base ΖΗΘ es a la base ΖΗΘΚΛ, así era la pirámide ΖΗΘΝ a la pirámide ΖΗΘΚΛΝ. Por

consiguiente, por igualdad, como la base ABΓΔE es a la base ZHΘKΛ, así la pirámide ABΓΔEM a la pirámide ZHΘKΛN [V 22]. Q. E. D.

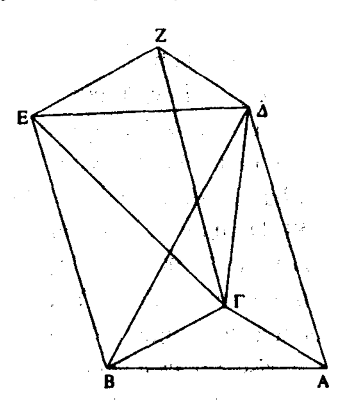
PROPOSICIÓN 7

Todo prisma que tiene como base un triángulo se divide en tres prismas iguales entre sí que tienen triángulos como bases.

Sea un prisma cuya base es el triángulo ABΓ y su (triángulo) opuesto ΔEZ.

Digo que el prisma ABΓΔEZ se divide en tres pirámides iguales entre sí que tienen triángulos como bases.

Trácense, pues, las (rectas) BΔ, EΓ, ΓΔ. Como ABEΔ es un paralelogramo y su diámetro [67] es BΔ, entonces el triángulo ABΔ es igual al triángulo EBΔ [I 34]. Luego la pirámide cuya base es el triángulo ABΔ y su vértice Γ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo ΔEB y su vértice el punto Γ [XII 5]. Pero la pirámide cuya base es el triángulo ΔEB y su vértice el punto Γ es la misma que la pirámide cuya base es el triángulo EBΓ y su vértice el punto Γ: porque están comprendidas por los mismos planos. Entonces, la pirámide cuya base es el triángulo ABΔ y su vértice el punto Γ es



[67] Respeto la terminología de Euclides que utiliza la palabra *diámetros* para la diagonal (Cf. *Elementos I-IV*, nota 9, pág. 194).

igual a la pirámide cuya base es el triángulo EBΓ y su vértice el punto Δ. Puesto que, a su vez, ZΓBE es un paralelogramo y su diámetro es ΓE, el triángulo ΓEZ es igual al triángulo ΓBE [I 34]. Entonces la pirámide cuya base es el triángulo BΓE y su vértice el punto Δ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo EΓZ y su vértice el punto Δ [XII 5]. Pero se ha demostrado que la pirámide cuya base es el triángulo BΓE y su vértice el punto Δ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo ABΔ y su vértice el punto Γ; entonces la pirámide cuya base es el triángulo ΓEZ y su vértice el punto Δ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo ABΔ y su vértice el punto Γ; por tanto, el prisma ABΓΔEZ se ha dividido en tres pirámides iguales entre sí que tienen triángulos como bases.

Y como la pirámide cuya base es el triángulo ABΔ y su vértice el punto Γ es la misma que la pirámide cuya base es el triángulo ΓAB y su vértice el punto Δ: porque están comprendidas por los mismos planos, mientras que la pirámide cuya base es el triángulo ABΔ y su vértice el punto Γ se ha demostrado que es el tercio del prisma cuya base es el triángulo ABΓ y su triángulo opuesto ΔEZ, entonces la pirámide cuya base es el triángulo ABΓ y su vértice el punto Δ es el tercio del prisma que tiene la misma base, a saber: el triángulo ABΓ, y como triángulo opuesto ΔEZ.

Porisma:

A partir de esto queda claro que toda pirámide es la tercera parte del prisma que tiene la misma base que ella e igual altura. Q. E. D. [68].

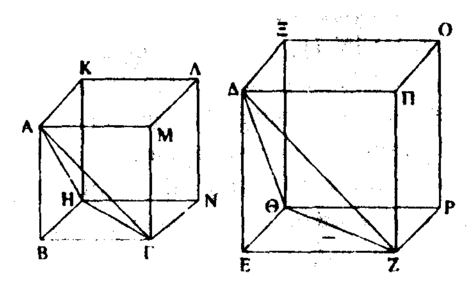
[68] Según Vera se trata de una ingeniosa demostración con la que Euclides se topó por una afortunada coincidencia. Vera aduce a este respecto las palabras de Beppo Levi: «profundizando en el método de exhausción, Euclides habría podido llegar al resultado directamente por el razonamiento anterior. Este paso lo hizo Arquímedes en el tratado de la cuadratura de la parábola, problema que, como sabemos, se puede considerar como una transposición del problema del volumen de la pirámide.» (Cf. VERA, *op. cit.*, pág. 951).

PROPOSICIÓN 8

Las pirámides semejantes que tienen como bases triángulos guardan una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.

Sean las pirámides semejantes y situadas de manera semejante cuyas bases son los triángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ y sus vértices los puntos Η, Θ.

Digo que la pirámide ΑΒΓΗ guarda con la pirámide ΔΕΖΘ una razón triplicada de la que ΒΓ (guarda) con ΕΖ.



Complétense, pues, los sólidos paralelepípedos ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ.

Ahora bien, como la pirámide ΑΒΓΗ es semejante a la pirámide ΔΕΖΘ, entonces, el ángulo ΑΒΓ es igual al ángulo ΔΕΖ, y el ángulo ΗΒΓ es igual al ángulo ΘΕΖ, y el ΑΒΗ al ΔΕΘ, y como ΑΒ es a ΔΕ, así ΒΓ a ΕΖ y ΒΗ a ΕΘ. Y dado que, como ΑΒ es a ΔΕ, así ΒΓ a ΕΖ y que los lados que comprenden ángulos iguales son proporcionales, entonces, el paralelogramo ΒΜ es semejante al paralelogramo ΕΠ. Por lo mismo, en efecto, el (paralelogramo) ΒΝ es semejante al (paralelogramo) ΕΡ y el (paralelogramo) ΒΚ al (paralelogramo) ΕΞ; luego los tres (paralelogramos) ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ son semejantes a los tres (paralelo-

gramos) EΠ, EΞ, EP. Pero los tres (paralelogramos) MB, BK, BN son iguales y semejantes a sus tres opuestos, y los tres (paralelogramos) EΠ, EΞ, EP son también iguales y semejantes a sus tres opuestos [XI 24]. Entonces los sólidos BHMΛ, EΘΠO están comprendidos por planos semejantes e iguales en número. Luego el sólido BHMΛ es semejante al sólido EΘΠO. Pero los sólidos paralelepípedos semejantes guardan una razón triplicada de la de sus lados correspondientes [XI 33]. Entonces el sólido BHMΛ guarda con el sólido EΘΠO una razón triplicada de la que el lado correspondiente BΓ guarda con el lado correspondiente EZ. Pero como el sólido BHMΛ es al sólido EΘΠO, así la pirámide ABΓH a la pirámide ΔEZΘ: pues la pirámide es la sexta parte del sólido porque el prisma, que es la mitad del sólido paralelepípedo [XI 28], es el triple de la pirámide [XII 7].

Por consiguiente, la pirámide ABΓH guarda con la pirámide ΔEZΘ una razón triplicada de la que BΓ (guarda) con EZ. Q. E. D.

Porisma:

A partir de esto queda claro que las pirámides que tienen como bases polígonos guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes. Pues, si se dividen en las pirámides contenidas en ellas que tengan como bases triángulos —por el hecho de que los polígonos semejantes de sus bases se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los (polígonos) enteros [VI 20]— entonces, como una de las pirámides con base triangular de la primera es a una de las pirámides con base triangular de la segunda, así serán todas las pirámides con base triangular de la primera pirámide a las pirámides con base triangular de la segunda pirámide [V 12], es decir, la propia pirámide que tiene como base un polígono a la (otra) pirámide que tiene como base un polígono. Pero la pirámide que tiene como base un triángulo guarda con

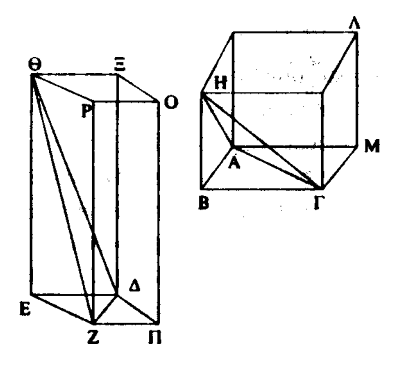
la (pirámide) que tiene como base un triángulo una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.

Por consiguiente, la (pirámide) que tiene como base un polígono guarda con la que tiene una base semejante una razón triplicada de la que el lado guarda con el lado [69].

Proposición 9

Las bases de las pirámides iguales que tienen como bases triángulos están inversamente relacionadas con sus alturas; y aquellas pirámides que tienen como bases triángulos, cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas, son iguales.

Sean, pues, las pirámides iguales que tienen como bases los triángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ y como vértices los puntos Η, Θ.



Digo que las bases de las pirámides ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ están inversamente relacionadas con sus alturas, y como la base ΑΒΓ

[69] Al parecer no faltan motivos para dudar de la autenticidad del porisma P sólo lo tiene en el margen, aunque es de la primera mano.

es a la base ΔEZ, así la altura de la pirámide ΔEZΘ a la altura de la pirámide ABΓH.

Pues complétense los sólidos paralelepípedos BHMΛ, EΘΠO. Y como la pirámide ABΓH es igual a la pirámide ΔEZΘ, y el sólido BHMΛ es el séxtuple de la pirámide ABΓH, mientras que el sólido EΘΠO es el séxtuple de la pirámide ΔEZΘ, entonces el sólido BHMΛ es igual al sólido EΘΠO. Pero las bases de los sólidos paralelepípedos iguales están inversamente relacionadas con sus alturas [XI 34]; entonces, como la base BM es a la base EΠ, así la altura del sólido EΘΠO es a la altura del sólido BHMΛ. Ahora bien, como la base BM es a la base EΠ, así el triángulo ABΓ al triángulo ΔEZ [I 34]. Luego también, como el triángulo ABΓ es al triángulo ΔEZ, así la altura del sólido EΘΠO a la altura del sólido BHMΛ [V 11]. Pero la altura del sólido EΘΠO es la misma que la altura de la pirámide ΔEZΘ, y la altura del sólido BHMΛ es la misma que la altura de la pirámide ABΓH; entonces, como la base ABΓ es a la base ΔEZ, así la altura de la pirámide ΔEZΘ es a la altura de la pirámide ABΓH. Por tanto, las bases de las pirámides ABΓH, ΔEZΘ están inversamente relacionadas con sus alturas.

Pero ahora, estén las bases de las pirámides ABΓH, ΔEZΘ inversamente relacionadas con sus alturas, y, como la base ABΓ es a la base ΔEZ, así la altura de la pirámide ΔEZΘ a la altura de la pirámide ABΓH.

Digo que la pirámide ABΓH es igual a la pirámide ΔEZΘ.

Pues, siguiendo la misma construcción, dado que, como la base ABΓ es a la base ΔEZ, así la altura de la pirámide ΔEZΘ a la altura de la pirámide ABΓH, mientras que, como la base ABΓ es a la base ΔEZ, así el paralelogramo BM al paralelogramo EΠ; entonces también, como el paralelogramo BM es al paralelogramo EΠ, así la altura de la pirámide ΔEZΘ a la altura de la pirámide ABΓH [V 11]. Ahora bien, la altura de la pirámide ΔEZΘ es la misma que la altura del paralelepípedo EΘΠO, y la altura

de la pirámide ΑΒΓΗ es la misma que la altura del paralelepípedo ΒΗΜΛ. Entonces, como la base ΒΜ es a la base ΕΠ, así la altura del paralelepípedo ΕΘΠΟ a la altura del paralelepípedo ΒΗΜΛ. Pero aquellos sólidos paralelepípedos cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales [XI 34]; luego el sólido paralelepípedo ΒΗΜΛ es igual al sólido paralelepípedo ΕΘΠΟ. Ahora bien, la pirámide ΑΒΓΗ es la sexta parte del (paralelepípedo) ΒΗΜΛ, y la pirámide ΔΕΖΘ es la sexta parte del paralelepípedo ΕΘΠΟ. Por tanto la pirámide ΑΒΓΗ es igual a la pirámide ΔΕΖΘ.

Por consiguiente, las bases de las pirámides que tienen como bases triángulos están inversamente relacionadas con sus alturas, y aquellas pirámides que tienen como bases triángulos, cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas, son iguales. Q. E. D.

Proposición 10

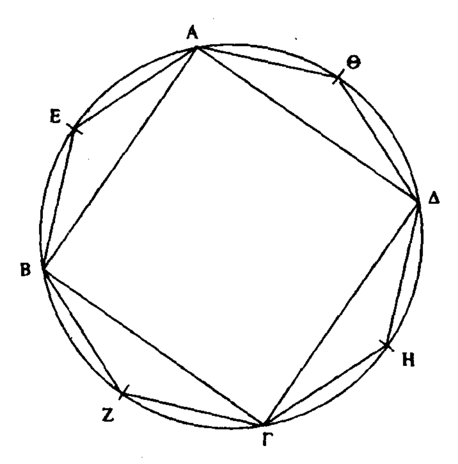
Todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base e igual altura.

Tenga, pues, un cono la misma base que un cilindro, el círculo ΑΒΓΔ, e igual altura.

Digo que el cono es la tercera parte del cilindro, es decir que el cilindro es el triple del cono.

Pues, si el cilindro no es el triple del cono, el cilindro será o mayor que el triple del cono o menor que el triple del cono. Sea, en primer lugar, mayor que el triple e inscríbase en el círculo ΑΒΓΔ el cuadrado ΑΒΓΔ [IV 6]. Entonces, el cuadrado ΑΒΓΔ es mayor que la mitad del círculo ΑΒΓΔ. Levántese a partir del cuadrado ΑΒΓΔ un prisma de altura igual a la del cilindro. Entonces el prisma levantado es mayor que la mitad del

cilindro: puesto que, si circunscribimos un cuadrado en torno al círculo ΑΒΓΔ [IV 7], el cuadrado inscrito en el círculo ΑΒΓΔ



es la mitad del circunscrito; y los sólidos levantados a partir de ellos son prismas paralelepípedos de la misma altura, y los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases [XI 32]; entonces, el prisma levantado a partir del cuadrado ΑΒΓΔ es la mitad del prisma levantado a partir del cuadrado circunscrito en torno al círculo ΑΒΓΔ [XI 28, XII 6 y 7 Por.], y el cilindro es menor que el prisma levantado a partir del cuadrado circunscrito en torno al círculo ΑΒΓΔ; luego el prisma levantado a partir del cuadrado ΑΒΓΔ y de la misma altura que el cilindro es mayor que la mitad del cilindro. Divídanse en dos partes iguales las circunferencias ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ por los puntos Ε, Ζ, Η, Θ, y trácense ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΕ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; entonces cada uno de los triángulos ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ es mayor que la mitad del segmento del círculo ΑΒΓΔ en el que está, como demostrábamos anteriormente [XII 2]. Levántense prismas de la misma altura que el cilindro sobre cada uno de los triángulos ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ; entonces cada uno de los

prismas levantados es mayor que la mitad del segmento de cilindro en el que está; puesto que, si trazamos paralelas a AB, BΓ, ΓΔ, ΔA por los puntos EZHΘ y completamos los paralelogramos sobre las (rectas) AB, BΓ, ΓΔ, ΔA y levantamos, a partir de ellos, sólidos paralelepípedos de igual altura que el cilindro, los prismas sobre los triángulos AEB, BZΓ, ΓHΔ, ΔΘA son la mitad de cada uno de los levantados; y los segmentos del cilindro son menores que los sólidos paralelepípedos levantados; de modo que también los prismas (levantados) sobre los triángulos AEB, BZΓ, ΓHΔ, ΔΘA son mayores que la mitad de los de los segmentos de cilindro en que están. Ahora, si dividimos en dos partes iguales las circunferencias que han quedado y trazamos rectas (uniendo los puntos de división) y levantamos prismas de la misma altura que el cilindro sobre cada uno de los triángulos y procedemos así sucesivamente, dejaremos ciertos segmentos de cilindro que serán menores que el exceso con el que el cilindro excede al triple del cono [X 1]. Déjense y sean AE, EB, BZ, ZΓ, ΓH, HΔ, ΔΘ, ΘA; entonces el prisma restante cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su altura la misma que la del cilindro es mayor que el triple del cono. Pero el prisma cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su altura la misma que la del cilindro es el triple de la pirámide cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su vértice el mismo que el del cono [XII 7 Por.]; luego la pirámide cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su vértice el mismo que el del cono es mayor que el cono que tiene como base el círculo ABΓΔ. Pero también es menor, porque está comprendida por él; lo cual es imposible. Por tanto el cilindro no es mayor que el triple del cono.

Digo ahora que el cilindro tampoco es menor que el triple del cono.

Pues, si fuera posible, sea el cilindro menor que el triple del cono; entonces, por inversión, el cono es mayor que la tercera parte del cilindro. Inscríbase el cuadrado ABΓΔ en el círcu-

lo ABΓΔ; entonces el cuadrado ABΓΔ es mayor que la mitad del círculo ABΓΔ. Y levántese sobre el cuadrado ABΓΔ una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono; entonces la pirámide levantada es mayor que la mitad del cono; porque, como antes demostrábamos, si circunscribimos un cuadrado en torno al círculo, el cuadrado ABΓΔ será la mitad del cuadrado circunscrito en torno al círculo; y si levantamos a partir de los cuadrados sólidos paralelepípedos de la misma altura que el cono que también se llaman prismas, el (sólido) levantado a partir del cuadrado ABΓΔ será la mitad del levantado a partir del cuadrado circunscrito en torno al círculo, porque son entre sí como sus bases [XI 32]; de modo que también los tercios (están en la misma razón); así pues, la pirámide cuya base es el cuadrado ABΓΔ es la mitad de la pirámide levantada a partir del cuadrado circunscrito en torno al círculo. Y la pirámide levantada sobre el cuadrado circunscrito en torno al círculo es mayor que el cono, pues lo comprende; luego la pirámide cuya base es el cuadrado ABΓΔ y su vértice el mismo que el del cono es mayor que la mitad del cono. Divídanse en dos partes iguales las circunferencias AB, BΓ, ΓΔ, ΔA por los puntos E, Z, H, Θ y trácense AE, EB, BZ, ΓH, HΔ, ΔΘ, ΘA; entonces, cada uno de los triángulos AEB, BZΓ, ΓHΔ, ΔΘA es mayor que la mitad del segmento del círculo ABΓΔ en el que está. Ahora bien, levántese sobre cada uno de los triángulos AEB, BZΓ, ΓHΔ, ΔΘA pirámides que tengan el mismo vértice que el cono; entonces cada una de las pirámides levantadas de la misma manera es mayor que la mitad del segmento de cono en el que está. Ahora, si dividimos en dos partes iguales las circunferencias que quedan y trazamos rectas (uniendo los puntos de división) y levantamos sobre cada uno de los triángulos pirámides que tengan el mismo vértice que el cono y procedemos así sucesivamente, dejaremos ciertos segmentos de cono que serán menores que el exceso con que el cono excede a la tercera parte del cilindro [X 1].

Déjense y sean los de AE, EB, BZ, ZΓ, ΓH, HΔ, ΔΘ, ΘA; entonces la pirámide restante cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su vértice el mismo que el del cono, es mayor que la tercera parte del cilindro. Pero la pirámide cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su vértice el mismo que el del cono es la tercera parte del prisma cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su altura la misma que la del cilindro; entonces el prisma cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su altura la misma que la del cilindro es mayor que el cilindro cuya base es el círculo ABΓΔ. Pero también es menor, porque está comprendido por él; lo cual es imposible. Luego el cilindro no es menor que el triple del cono. Pero se ha demostrado que tampoco es mayor que el triple. Por tanto, el cilindro es el triple del cono; de modo que el cono es la tercera parte del cilindro.

Por consiguiente, todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que él e igual altura. Q. E. D.

Proposición 11

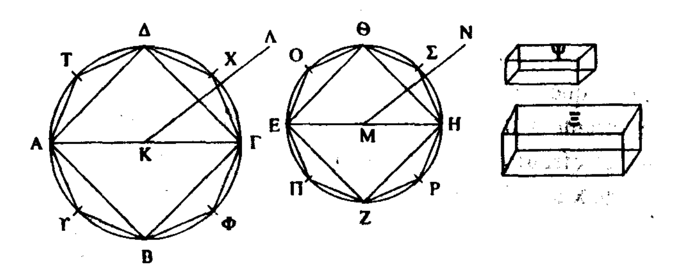
Los conos y cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Haya unos conos y cilindros de la misma altura cuyas bases son los círculos ABΓΔ, EZHΘ, sus ejes KΛ, MN y los diámetros de sus bases AΓ, EH.

Digo que, como el círculo ABΓΔ es al círculo EZHΘ, así el cono AΛ al cono EN.

Porque, si no, como el círculo ABΓΔ es al círculo EZHΘ, así será el cono AΛ o a un sólido menor o a uno mayor que el cono EN. Séalo en primer lugar al (sólido) menor Ξ, y sea el sólido Ψ igual a aquello en lo que el sólido Ξ es menor que el cono EN; entonces el cono EN es igual a los sólidos Ξ, Ψ. Inscríbase el

cuadrado EZHΘ en el círculo EZHΘ; entonces el cuadrado es mayor que la mitad del círculo. Levántese a partir del cuadrado



EZHΘ una pirámide de igual altura que el cono; entonces la pirámide levantada es mayor que la mitad del cono: puesto que, si circunscribimos un cuadrado en torno al círculo y levantamos a partir de él una pirámide de igual altura que el cono, la pirámide inscrita es la mitad de la circunscrita, pues son entre sí como sus bases [XII 6]; mientras que el cono es menor que la pirámide circunscrita. Divídanse en dos partes iguales las circunferencias EZ, ZH, HΘ, ΘE, por los puntos O, Π, P, Σ, y trácense ΘO, OE, EΠ, ΠZ, ZP, PH, HΣ, ΣΘ. Entonces, cada uno de los triángulos ΘOE, EΠZ, ZPH, HΣΘ es mayor que la mitad del segmento de círculo en que está. Levántese sobre cada uno de los triángulos ΘOE, EΠZ, ZPH, HΣΘ una pirámide de igual altura a la del cono. Entonces cada una de las pirámides levantadas es mayor que la mitad del segmento de cono en que está. Ahora, si dividimos en dos partes iguales las circunferencias que quedan y trazamos rectas (uniendo los puntos de división) y levantamos sobre cada uno de los triángulos pirámides de igual altura a la del cono y procedemos así sucesivamente dejaremos ciertos segmentos de cono que serán menores que el sólido Ψ [X 1]. Déjense y sean los de ΘOE, EΠZ, ZPH, HΣΘ. Entonces, la pirámide restante cuya base es el polígono ΘOEΠZPHΣ y su altura la misma que la del cono es mayor que el sólido Ξ. Inscrí-

base también en el círculo ΑΒΓΔ el polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ semejante y situado de manera semejante al polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ, y levántese sobre él una pirámide de igual altura que el cono ΑΛ. Pues bien, dado que, como el cuadrado de ΑΓ es al cuadrado de ΕΗ, así el polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ al polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ [XII 1], mientras que, como el cuadrado de ΑΓ es al cuadrado de ΕΗ, así el círculo ΑΒΓΔ al círculo ΕΖΗΘ [XII 2], entonces, también, como el círculo ΑΒΓΔ es al círculo ΕΖΗΘ, así el polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ al polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ. Pero, como el círculo ΑΒΓΔ es al círculo ΕΖΗΘ, así el cono ΑΛ al sólido Ξ, y como el polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ es al polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ así la pirámide cuya base es el polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ y su vértice el punto Λ a la pirámide cuya base es el polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ y su vértice el punto Ν [XII 6]. Entonces, también, como el cono ΑΛ es al sólido Ξ, así la pirámide cuya base es el polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ y su vértice el punto Λ a la pirámide cuya base es el polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ y su vértice el punto Ν [V 11]. Luego, por alternancia, como el cono ΑΛ es a la pirámide (inscrita) en él, así el sólido Ξ a la pirámide (inscrita) en el cono ΕΝ [V 6]. Pero el cono ΑΛ es mayor que la pirámide (inscrita) en él; entonces, el sólido Ξ es mayor que la pirámide inscrita en el cono ΕΝ. Pero también menor; lo cual es absurdo; por tanto, el cono ΑΛ no es a un sólido menor que el cono ΕΝ como el círculo ΑΒΓΔ al círculo ΕΖΗΘ. De manera semejante demostraríamos que tampoco el cono ΕΝ es a algún sólido menor que el cono ΑΛ, como el círculo ΕΖΗΘ es al círculo ΑΒΓΔ.

Digo ahora que tampoco el cono ΑΛ es a algún sólido mayor que el cono ΕΝ como el círculo ΑΒΓΔ es al círculo ΕΖΗΘ.

Pues, si fuera posible, séalo al (sólido) mayor Ξ. Entonces, por inversión, como el círculo ΕΖΗΘ es al círculo ΑΒΓΔ, así el sólido Ξ al cono ΑΛ. Pero, como el sólido Ξ es al cono ΑΛ, así el cono ΕΝ a un sólido menor que el cono ΑΛ; entonces, también, como el círculo ΕΖΗΘ es al círculo ΑΒΓΔ, así el cono ΕΝ a



un sólido menor que el cono AΛ; lo cual se ha demostrado que es imposible; luego el cono AΛ no es a un sólido mayor que el cono EN como el círculo ABΓΔ al círculo EZHΘ. Pero se ha demostrado que tampoco lo es a uno menor; por tanto, como el círculo ABΓΔ es al círculo EZHΘ, así el cono AΛ al cono EN.

Pero como el cono es al cono, así el cilindro al cilindro, porque cada uno es respectivamente el triple del otro [XII 10]. Luego también, como el círculo ABΓΔ es al círculo EZHΘ, así los cilindros (levantados) sobre ellos (que son) de la misma altura.

Por consiguiente, los conos y cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases. Q. E. D.

Proposición 12

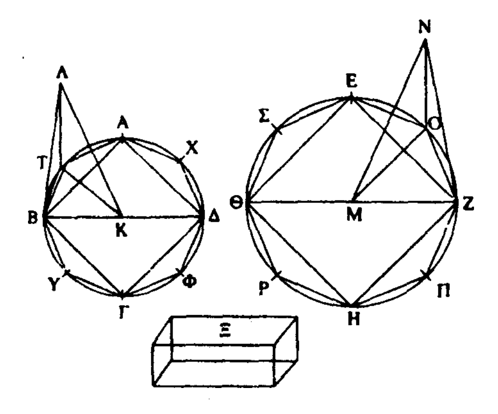
Los conos y cilindros semejantes guardan entre sí una razón triplicada de (la que guardan) los diámetros de sus bases.

Sean unos cilindros y conos semejantes cuyas bases son los círculos ABΓΔ, EZHΘ; BΔ, ZΘ los diámetros de sus bases y KΛ, MN los ejes de los conos y los cilindros.

Digo que el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto Λ guarda con el cono cuya base es el círculo EZHΘ y su vértice el punto N una razón triplicada de la que BΔ (guarda) con ZΘ.

Pues, si el cono ABΓΔΛ no guarda con el cono EZHΘN una razón triplicada de la que BΔ guarda con ZΘ, el cono ABΓΔΛ guardará una razón triplicada con un sólido menor que el cono EZHΘN o con uno mayor. Guárdela, en primer lugar, con el sólido menor Ξ e inscríbase el cuadrado EZHΘ en el círculo EZHΘ [IV 6]; entonces el cuadrado EZHΘ es mayor que la mitad del círculo EZHΘ. Levántese sobre el cuadrado EZHΘ una pirámide

que tenga la misma altura que el cono; entonces la pirámide levantada es mayor que la mitad del cono. Ahora, divídanse en



dos partes iguales las circunferencias EZ, ZH, HΘ, ΘE por los puntos O, Π, P, Σ, y trácense EO, OZ, ZΠ, ΠH, HP, PΘ, ΘΣ, ΣE. Entonces cada uno de los triángulos EOZ, ZΠH, HPΘ, ΘΣE es mayor que la mitad del segmento del círculo EZHΘ en el que está; levántese sobre cada uno de los triángulos EOZ, ZΠH, HPΘ, ΘΣE una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono; entonces cada una de las pirámides levantadas es también mayor que la mitad del segmento de cono en el que está. Ahora, si dividimos en dos partes iguales las circunferencias que quedan y trazamos rectas (uniendo los puntos de división) y levantamos sobre cada uno de los triángulos pirámides que tengan el mismo vértice que el cono y procedemos así sucesivamente dejaremos ciertos segmentos de cono que serán menores que el exceso con el que el cono EZHΘN excede al sólido Ξ [X 1]. Déjense y sean los de EO, OZ, ZΠ, ΠH, HP, PΘ, ΘΣ, ΣE; entonces, la pirámide restante cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N es mayor que el sólido Ξ. Inscríbase también en el círculo ABΓΔ el polígono ATBYΓΦΔX semejante y situado

de manera semejante al polígono ΕΟΖΠΗΡΘΣ, y levántese sobre el polígono ΑΤΒΥΓΦΔΧ una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono y sea ΛΒΤ uno de los triángulos que comprenden la pirámide cuya base es el polígono ΑΤΒΥΓΦΔΧ y su vértice el punto Λ y sea ΝΖΟ uno de los triángulos que comprenden la pirámide cuya base es el polígono ΕΟΖΠΗΡΘΣ y su vértice el punto Ν, y trácense ΚΤ, ΜΟ. Ahora bien, como el cono ΑΒΓΔΛ es semejante al cono ΕΖΗΘΝ, entonces, como ΒΔ es a ΖΘ, así el eje ΚΛ al eje ΜΝ [XI Def. 24]. Pero, como ΒΔ es a ΖΘ, así ΒΚ a ΖΜ; luego, como ΒΚ es a ΖΜ, así ΚΛ a ΜΝ. Y, por alternancia, como ΒΚ es a ΚΛ, así ΖΜ a ΜΝ [V 16]. Ahora bien, los lados que comprenden los ángulos iguales ΒΚΛ, ΖΜΝ son proporcionales; entonces, el triángulo ΒΚΛ es semejante al triángulo ΖΜΝ [VI 6]. A su vez, dado que, como ΒΚ es a ΚΤ, así ΖΜ a ΜΟ, y comprenden los ángulos iguales ΒΚΤ, ΖΜΟ: porque la parte que el ángulo ΒΚΤ es de los cuatro (ángulos) rectos correspondientes al centro Κ, la misma parte es también el ángulo ΖΜΟ de los cuatro (ángulos) rectos correspondientes al centro Μ; pues bien, como los lados que comprenden ángulos iguales son proporcionales, entonces el triángulo ΒΚΤ es semejante al triángulo ΖΜΟ [VI 6]. A su vez, puesto que se ha demostrado que, como ΒΚ es a ΚΛ, así ΖΜ a ΜΝ, y ΒΚ es igual a ΚΤ mientras que ΖΜ es igual a ΟΜ, entonces, como ΤΚ es a ΚΛ, así ΟΜ a ΜΝ. Y los lados que (comprenden) los ángulos iguales ΤΚΛ, ΟΜΝ —porque son rectos— son proporcionales; luego el triángulo ΛΚΤ es semejante al triángulo ΝΜΟ [VI 6]. Y como, por la semejanza de los triángulos ΛΚΒ, ΝΜΖ, como ΛΒ es a ΒΚ, así ΝΖ a ΖΜ, y por la semejanza de los triángulos ΒΚΤ, ΖΜΟ, como ΚΒ es a ΒΤ, así ΜΖ a ΖΟ, entonces, por igualdad, como ΛΒ es a ΒΤ, así ΝΖ a ΖΟ [V 22]. A su vez, dado que, por la semejanza de los triángulos ΛΤΚ, ΝΟΜ, como ΛΤ es a ΤΚ, así ΝΟ a ΟΜ, y por la semejanza de los triángulos ΤΚΒ, ΟΜΖ, como ΚΤ es a ΤΒ, así ΜΟ a ΟΖ, entonces, por igualdad, como ΛΤ es a ΤΒ, así ΝΟ a ΟΖ

[V 22]. Pero se ha demostrado que también, como TB es a BΛ, así OZ a ZN. Luego, por igualdad, como TΛ es a ΛB, así ON a NZ [V 22]. Por tanto, los lados de los triángulos ΛTB, NOZ son proporcionales; luego los triángulos ΛTB, NOZ son equiangulares [VI 5]; de modo que también son semejantes [VI Def. 1]. Por tanto, la pirámide cuya base es el triángulo BKT y su vĕrtice el punto Λ es semejante a la pirámide cuya base es el triángulo ZMO y su vértice el punto N. Pues están comprendidas por planos semejantes e iguales en número [XI Def. 9]. Pero las pirámides semejantes que tienen como bases triángulos guardan entre sí una razón triplicada de la que guardan sus lados correspondientes [XII 8]. Luego la pirámide BKTΛ guarda con la pirámide ZMON una razón triplicada de la que BK guarda con ZM. De manera semejante, si trazamos rectas de los (puntos) A, X, Δ, Φ, Γ, Y al (punto) K y de los (puntos) E, Σ, Θ, P, H, Π al punto M, y levantamos sobre cada uno de los triángulos pirámides que tengan el mismo vértice que los conos, demostraremos que cada una de las pirámides dispuestas de manera semejante guarda con cada una de las pirámides dispuestas de manera semejante una razón triplicada de la que el lado correspondiente BK guardará con el lado correspondiente ZM, es decir, de la que BΔ guarda con ZΘ. Y como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes a todos los consecuentes [V 12]; entonces, como la pirámide BKTΛ es a la pirámide ZMON, así la pirámide entera cuya base es el polígono ATBYΓΦΔX y su vértice el punto Λ a la pirámide entera cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N; de modo que también la pirámide cuya base es ATBYΓΦΔX y su vértice el punto Λ guarda con la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N una razón triplicada de la que BΔ (guarda) con ZΘ. Pero se ha supuesto que también el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto Λ guarda con el sólido Ξ una razón triplicada de la

que BΔ (guarda) con ZΘ; entonces, como el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto Λ es al sólido Ξ, así la pirámide cuya base es el polígono ATBYΓΦΔX y su vértice el punto Λ es a la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N. Entonces, por alternancia, como el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto Λ es a la pirámide (inscrita) en él, cuya base es el polígono ATBYΓΦΔX y su vértice el punto Λ, así el (sólido) Ξ a la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N [V 16]. Pero el antedicho cono es mayor que la pirámide (inscrita) en él: porque la comprende. Entonces el sólido Ξ es también mayor que la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N. Pero también es menor; lo cual es imposible. Por tanto, el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto Λ no guarda con un sólido menor que el cono cuya base es el círculo EZHΘ y su vértice el punto N una razón triplicada de la que BΔ guarda con ZΘ. De manera semejante demostraríamos que tampoco el cono EZHΘN guarda con un sólido menor que el cono ABΓΔΛ una razón triplicada de la que ZΘ (guarda) con BΔ.

Digo ahora que tampoco el cono ABΓΔΛ guarda con un sólido mayor que el cono EZHΘN una razón triplicada de la que BΔ guarda con ZΘ.

Pues, si fuera posible, guárdela con el (sólido) mayor Ξ. Entonces, por inversión, el sólido Ξ guarda con el cono ABΓΔΛ una razón triplicada de la que ZΘ (guarda) con BΔ. Pero, como el sólido Ξ es al cono ABΓΔΛ, así el cono EZHΘN a un sólido menor que el cono ABΓΔΛ. Entonces, también, el cono EZHΘN guarda con un sólido menor que el cono ABΓΔΛ una razón triplicada de la que ZΘ guarda con BΔ; lo cual se ha demostrado que es imposible; luego el cono ABΓΔΛ no guarda con un sólido mayor que el cono EZHΘN una razón triplicada de la que BΔ guarda con ZΘ. Pero se ha demostrado que tampoco con uno

menor. Por tanto, el cono ΑΒΓΔΛ guarda con el cono ΕΖΗΘΝ una razón triplicada de la que ΒΔ guarda con ΖΘ.

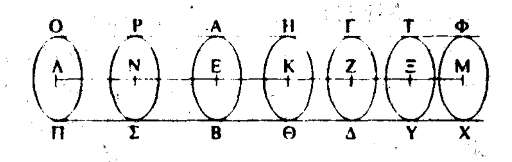
Ahora bien, como el cono es al cono, así el cilindro al cilindro: porque el cilindro es el triple del cono que está sobre la misma base y tiene igual altura que el propio cono [XII 10]. Luego el cilindro guarda con el cilindro una razón triplicada de la que ΒΔ (guarda) con ΖΘ.

Por consiguiente, los conos y cilindros semejantes guardan entre sí una razón triplicada de las de los diámetros de sus bases. Q. E. D.

Proposición 13

Si un cilindro es cortado por un plano que sea paralelo a los planos opuestos, entonces, como el cilindro es al cilindro, así el eje es al eje.

Sea cortado el cilindro ΑΔ por el plano ΗΘ que es paralelo a los planos opuestos ΑΒ, ΓΔ, y encuentre el plano ΗΘ al eje en el punto Κ.



Digo que, como el cilindro ΒΗ es al cilindro ΗΔ, así el eje ΕΚ al eje ΚΖ.

Prolónguese, pues, el eje ΕΖ por cada lado hasta los puntos Λ, Μ y dispónganse cuantos ejes se quiera ΕΝ, ΝΛ iguales al eje ΕΚ y cuantos se quiera ΖΞ, ΞΜ iguales a ΖΚ. Y considérese sobre el eje ΛΜ el cilindro ΟΧ cuyas bases son los círculos ΟΠ,

ΦX. Trácense, a través de los puntos N, Ξ, planos paralelos a AB, ΓΔ y a las bases del cilindro OX y háganse los círculos PΣ, TY en torno a los centros N, Ξ. Y como los ejes ΛN, NE, EK son iguales entre sí, entonces los cilindros ΠP, PB, BH son entre sí como sus bases [XII 11]; pero sus bases son iguales; luego los cilindros ΠP, PB, BH son iguales entre sí. Pues bien, como los ejes ΛN, NE, EK son iguales entre sí, y los cilindros ΠP, PB, BH también son iguales entre sí, y es igual el número (de los primeros) al número (de los segundos), entonces, el eje KΛ será el mismo múltiplo del eje EK que el cilindro ΠH del cilindro HB. Por lo mismo, entonces, el eje MK es el mismo múltiplo del eje KZ que el cilindro XH del cilindro HΔ. Y si el eje KΛ es igual al eje KM, el cilindro ΠH será también igual al cilindro HX, y si el eje es mayor que el eje, el cilindro será también mayor que el cilindro, y si es menor, menor. Entonces, siendo cuatro magnitudes los ejes EK, KZ y los cilindros BH, HΔ, se han tomado los equimúltiplos, a saber: el eje ΛK y el cilindro ΠH, del eje EK y el cilindro BH; y (equimúltiplos, a saber) el eje KM y el cilindro HX, del eje KZ y el cilindro HΔ; y se ha demostrado que si el eje KΛ excede al eje KM, también el cilindro ΠH excede al cilindro HX, y si es igual, igual y si menor, menor. Por tanto, como el eje EK es al eje KZ, así el cilindro BH al cilindro HΔ [V Def. 5]. Q. E. D.

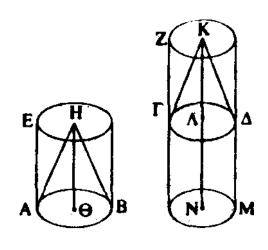
Proposición 14

Los conos y cilindros que están sobre bases iguales son entre sí como sus alturas.

Estén, pues, los cilindros EB, ZΔ sobre bases iguales, a saber: los círculos AB, ΓΔ.

Digo que, como el cilindro EB es al cilindro ZΔ, así el eje HΘ al eje KΛ.

Pues prolónguese el eje KΛ hasta el punto N y hágase ΛN igual al eje HΘ, y considérese el cilindro ΓM en torno al eje ΛN.



Pues bien, como los cilindros EB, ΓM tienen la misma altura, son entre sí como sus bases [XII 11]. Pero las bases son iguales entre sí; luego los cilindros EB, ΓM son también iguales. Y como el cilindro ZM ha sido cortado por el plano ΓΔ que es paralelo a sus planos opuestos, entonces, como el cilindro ΓM es al cilindro ZΔ, así el eje ΛN al eje KΛ [XII 13]. Pero el cilindro ΓM es igual al cilindro EB, y el eje ΛN al eje HΘ; luego, como el cilindro EB es al cilindro ZΔ, así el eje HΘ al eje KΛ. Pero como el cilindro EB es al cilindro ZΔ, así el cono ABH al cono ΓΔK [XII 10]. Por tanto, como el eje HΘ es al eje KΛ, así el cono ABH al cono ΓΔK y el cilindro EB al cilindro ZΔ. [V Def. 5]. Q. E. D.

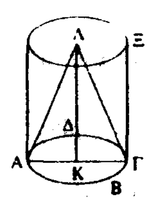
Proposición 15

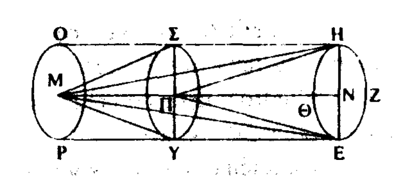
Las bases de los conos y cilindros iguales están inversamente relacionadas con las alturas, y aquellos conos y cilindros cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales.

Sean iguales los conos y cilindros cuyas bases son los círculos ABΓΔ, EZHΘ; sean AΓ, EH los diámetros (de las bases) y KΛ, MN los ejes que son también las alturas de los conos o cilindros, y complétense los cilindros AΞ, EO.

Digo que las bases de los cilindros AΞ, EO están inversamente relacionadas con sus alturas, y como la base ABΓΔ es a la base EZHΘ, así la altura MN a la altura KΛ.

Pues la altura ΛK o es igual a la altura MN o no lo es. Sea en primer lugar igual, y el cilindro AΞ es también igual al cilindro





EO. Pero los conos y cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases [XII 11]; entonces, la base ABΓΔ es igual a la base EZHΘ. De modo que también, en razón inversa, como la base ABΓΔ es a la base EZHΘ, así la altura MN a la altura KΛ. Pero ahora no sea la altura ΛK igual a la altura MN sino que sea mayor MN, y quítese de la altura MN, ΠN igual a KΛ, y córtese el cilindro EO por el punto Π con el plano TYΣ paralelo a los planos de los círculos EZHΘ, PO, y considérese el cilindro EΣ (levantado) a partir del círculo EZHΘ como base y con la altura NΠ. Ahora bien, como el cilindro AΞ es igual al cilindro EO, entonces, como el cilindro AΞ es al cilindro EΣ, así el cilindro EO al cilindro EΣ [V 7]. Pero como el cilindro AΞ es al cilindro EΣ, así la base ABΓΔ a la base EZHΘ: porque los cilindros AΞ, EΣ tienen la misma altura [XII 11]; y como el cilindro EO es al cilindro EΣ, así la altura MN a la altura ΠN: porque el cilindro EO ha sido cortado por un plano que es paralelo a sus planos opuestos [XII 13]. Luego, como la base ABΓΔ es a la base EZHΘ, así la altura MN a la altura ΠN [V 11]. Pero la altura ΠN es igual a la altura KΛ; entonces, como la base ABΓΔ es a la base EZHΘ, así la altura MN a la altura KΛ. Por tanto, las bases de los cilindros AΞ, EO están inversamente relacionadas con sus alturas.

Pero, ahora, estén las bases de los cilindros AΞ, EO inversamente relacionadas con sus alturas, y, como la base ABΓΔ es a la base EZHΘ, así la altura MN a la altura KΛ.

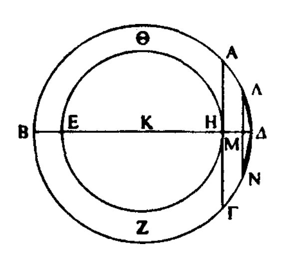
Digo que el cilindro AΞ es igual al cilindro EO.

Pues, siguiendo la misma construcción, dado que, como la base ABΓΔ es a la base EZHΘ, así la altura MN a la altura KΛ, mientras que la altura KΛ es igual a la altura ΠN, entonces, como la base ABΓΔ es a la base EZHΘ, así la altura MN a la altura ΠN. Pero como la base ABΓΔ es a la base EZHΘ, así el cilindro AΞ al cilindro EΣ: porque tienen la misma altura [XII 11]; y como la altura MN es a la altura ΠN, así el cilindro EO al cilindro EΣ [XII 13]; entonces, como el cilindro AΞ es al cilindro EΣ, así el cilindro EO al cilindro EΣ [V 11]. Por tanto el cilindro AΞ es igual al cilindro EO [V 9]. Y de la misma forma también en (el caso de) los conos. Q. E. D.

Proposición 16

Dados dos círculos con el mismo centro, inscribir en el círculo mayor un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque al círculo menor.

Sean ABΓΔ, EZHΘ los dos círculos con el mismo centro K. Así pues, hay que inscribir en el círculo mayor ABΓΔ un polígono equilátero y con un número par de lados que no toque al círculo EZHΘ.



Trácese, pues, por el centro K, la recta BKΔ, y trácese, por el punto H, la (recta) HA formando ángulos rectos con la recta BΔ y prolónguese hasta el punto Γ; entonces AΓ toca el círculo EZHΘ [III 16 Por.]. Ahora, si dividimos en dos partes iguales la circunferencia BAΔ, y su mitad en dos partes iguales, y procedemos así sucesivamente,

dejaremos una circunferencia menor que ΑΔ; déjese y sea ΛΔ; trácese, de Λ a ΒΔ, la perpendicular ΛΜ y prolónguese hasta Ν, y trácense ΛΔ, ΔΝ; entonces ΛΔ es igual a ΔΝ [III 3; I 4]. Y como ΛΝ es paralela a ΑΓ y ΑΓ toca el círculo ΕΖΗΘ, entonces, ΛΝ no toca el círculo ΕΖΗΘ; luego ΛΔ, ΔΝ están lejos de tocar el círculo ΕΖΗΘ. Ahora, si adaptamos sucesivamente rectas iguales a ΛΔ al círculo ΑΒΓΔ inscribiremos en el círculo ΑΒΓΔ un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque el círculo menor ΕΖΗΘ. Q. E. F.

Proposición 17

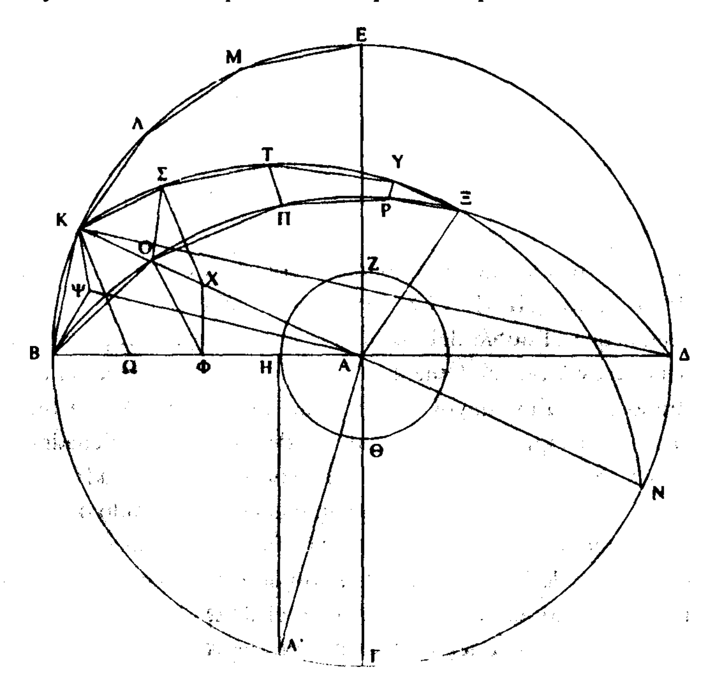
Dadas dos esferas con el mismo centro, inscribir en la esfera mayor un sólido poliedro que no toque la esfera menor en su superficie.

Considérense dos esferas con el mismo centro Α.

Así pues, hay que inscribir en la esfera mayor un sólido poliedro que no toque la esfera menor en su superficie.

Córtense las esferas por un plano a través del centro; entonces las secciones serán círculos: porque la esfera se generaba permaneciendo fijo el diámetro y haciendo girar el semicírculo en torno a él [XI Def. 14]; de modo que sea cual sea la posición en que consideremos el semicírculo, el plano trazado a través de él producirá un círculo en la superficie de la esfera. Y está claro que también es el máximo posible: porque el diámetro de la esfera que es el diámetro del semicírculo y, por supuesto, del círculo, es mayor que todas las (rectas) trazadas en el círculo o en la esfera. Así pues, sea ΒΓΔΕ el círculo en la esfera mayor, y el círculo ΖΗΘ el círculo en la esfera menor, y trácense sus dos diámetros ΒΔ, ΓΕ que forman ángulos rectos entre sí, y, dados los dos círculos ΒΓΔΕ, ΖΗΘ con el mismo cen-

tro, inscríbase en el círculo mayor ΒΓΔΕ, un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque al círculo menor



ΖΗΘ; sean ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ sus lados en el cuadrante ΒΕ, y una vez trazada ΚΑ, prolónguese hasta Ν, y levántese a partir del punto Α, ΑΞ formando ángulos rectos con el plano del círculo ΒΓΔΕ y encuentre la superficie de la esfera en el punto Ξ; trácense planos a través de ΑΞ y cada una de las (rectas) ΒΔ, ΚΝ; entonces, por las razones antedichas producirán círculos máximos en la superficie de la esfera. Prodúzcanse y sean ΒΞΔ, ΚΞΝ sus semicírculos sobre los diámetros ΒΔ, ΚΝ. Y puesto que ΞΑ forma ángulos rectos con el plano del círculo ΒΓΔΕ, entonces, todos los planos que pasan por ΞΑ forman ángulos rectos con el plano del círculo ΒΓΔΕ [XI 18]; de modo que los semicírcu-

los BΞΔ, KΞN forman ángulos rectos con el plano del círculo BΓΔE. Y como BEΔ, BΞΔ, KΞN son semicírculos iguales —porque tienen los diámetros iguales BΔ, KN— los cuadrantes BE, BΞ, KΞ son iguales entre sí. Entonces, cuantos lados del polígono hay en el cuadrante BE, tantos hay también en los cuadrantes BΞ, KΞ, iguales a las rectas BK, KΛ, ΛM, ME. Inscríbanse y sean BO, OΠ, ΠP, PΞ, KΣ, ΣT, TY, YΞ, y trácense ΣO, TΠ, YP, y trácense, desde los puntos O, Σ perpendiculares al plano del círculo BΓΔE [XI 11]; entonces, caerán sobre las secciones comunes de los planos BΔ, KN: porque los planos de los (semicírculos) BΞΔ, KΞN forman ángulos rectos con el plano del círculo BΓΔE. Caigan y sean OΦ, ΣX, y trácese XΦ. Ahora bien, como en los semicírculos iguales BΞΔ, KΞN se han quitado las (rectas) iguales BO, KΣ y se han trazado las perpendiculares OΦ, ΞX; (entonces) OΦ es igual a ΣX y BΦ a KX [III 27 y I 26]. Pero la (recta) entera BA también es igual a la (recta) entera KA; entonces, la restante ΦA es igual a la restante XA; luego, como BΦ es a ΦA, así KX a XA; por tanto, ΞΦ es paralela a KB [VI 2]. Y como cada una de las (rectas) OΦ, ΣX forma ángulos rectos con el plano del círculo BΓΔE, entonces OΦ es paralela a ΣX [XI 6]. Pero se ha demostrado que es igual a ella; luego XΦ, ΣO son también iguales y paralelas [I 33]. Y como XΦ es paralela a ΣO, mientras que XΦ es paralela a KB; entonces ΣO es también paralela a KB [XI 9]. Y BO, KΣ las unen (por sus extremos), entonces, el cuadrilátero KBOΣ está en un plano: porque, si hay dos rectas paralelas y se toman puntos al azar en ellas, la recta que une los puntos está en el mismo plano que las paralelas [XI 7]. Por lo mismo, entonces, cada uno de los cuadriláteros ΣOΠT, TΠPY están también en un plano [XI 2]. Y también el triángulo YPΞ está en un plano. Entonces, si consideramos rectas trazadas desde los puntos O, Σ, Π, T, P, Y hasta el (punto) A, se construirá una figura poliédrica sólida entre las circunferencias BΞ, KΞ compuesta de pirámides cuyas bases son los cua-

driláteros ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ y el triángulo ΥΡΞ y el vértice el punto Α. Pero, si seguimos la misma construcción en el caso de cada uno de los lados ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, como en el caso de ΒΚ, y además en el caso de los tres cuadrantes que quedan, se construirá una figura poliédrica inscrita en la esfera comprendida por pirámides cuyas bases son dichos cuadriláteros y el triángulo ΥΡΞ y los correspondientes a ellos y su vértice el punto Α.

Digo que dicho poliedro no tocará la esfera menor en la superficie en la que está el círculo ΖΗΘ.

Trácese del punto Α al plano del cuadrilátero ΚΒΟΣ la perpendicular ΑΨ y encuentre el plano en el punto Ψ [XI 11], y trácense ΨΒ, ΨΚ. Ahora bien, como ΑΨ forma ángulos rectos con el plano del cuadrilátero ΚΒΟΣ, entonces también forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano del cuadrilátero [XI Def. 3]. Luego ΑΨ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) ΒΨ, ΨΚ. Y como ΑΒ es igual a ΑΚ, el cuadrado de ΑΒ es también igual al cuadrado de ΑΚ. Y los cuadrados de ΑΨ, ΨΒ son iguales al cuadrado de ΑΒ: porque el ángulo correspondiente a Ψ es recto [I 47]. Y los cuadrados ΑΨ, ΨΚ son iguales al cuadrado de ΑΚ [id.]. Luego los cuadrados de ΑΨ, ΨΒ son iguales a los cuadrados de ΑΨ, ΨΚ. Quítese de ambos el de ΑΨ; entonces el cuadrado restante, el de ΒΨ, es igual al cuadrado restante, el de ΨΚ; luego ΒΨ es igual a ΨΚ. Demostraríamos de manera semejante que las rectas trazadas desde Ψ hasta Ο, Σ son iguales a cada una de las (rectas) ΒΨ, ΨΚ. Luego el círculo descrito con centro Ψ y, como distancia, una de las (rectas) ΨΒ, ΨΚ pasará también a través de Ο, Σ y ΚΒΟΣ será un cuadrilátero en un círculo.

Y como ΚΒ es mayor que ΧΦ, mientras que ΧΦ es igual a ΣΟ, entonces ΚΒ es mayor que ΣΟ. Pero ΚΒ es igual que cada una de las (rectas) ΚΣ, ΒΟ; luego cada una de las (rectas) ΚΣ, ΒΟ es mayor que Σ. Y como ΚΒΟΣ es un cuadrilátero en un círculo, y ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ son iguales y ΟΣ menor y ΒΨ es el radio del

círculo, entonces, el cuadrado de KB es mayor que el doble del cuadrado de BΨ. Trácese la perpendicular KΩ del (punto) K a la (recta) BΦ. Y como BΔ es menor que el doble de ΔΩ, y, como BΔ es a ΔΩ, así el (rectángulo comprendido) por ΔB, BΩ al (rectángulo comprendido) por ΔΩ, ΩB, si construimos el cuadrado de BΩ y completamos el paralelogramo sobre ΩΔ, entonces, el (rectángulo comprendido) por ΔB, BΩ es menor que el doble del (rectángulo comprendido) por ΔΩ, ΩB. Y si se traza KΔ, el (rectángulo comprendido) por ΔB, BΩ es igual al cuadrado de BK, y el (rectángulo comprendido) por ΔΩ, ΩB es igual al cuadrado de KΩ [III 31, VI 8 y Por.]; luego el cuadrado de KB es menor que el doble del cuadrado de KΩ. Pero el cuadrado de KB es mayor que el doble del cuadrado de BΨ; entonces el cuadrado de KΩ es mayor que el cuadrado de BΨ. Ahora bien, como BA es igual a KA, el cuadrado de BA es igual al cuadrado de AK. Y los cuadrados de BΨ, ΨA son iguales al cuadrado de BA, y los cuadrados de KΩ, ΩA son iguales al cuadrado de KA [I 47]; luego los cuadrados de BΨ, ΨA son iguales a los cuadrados de KΩ, ΩA, de los cuales el cuadrado de KΩ es mayor que el de BΨ; por tanto, el cuadrado restante, el de ΩA es menor que el cuadrado de ΨA. Luego AΨ es mayor que AΩ; entonces AΨ es mucho mayor que AH. Y AΨ está en una base del poliedro y AH en la superficie de la esfera menor; de modo que el poliedro no toca la esfera menor en su superficie.

Por consiguiente, dadas dos esferas con el mismo centro, se ha inscrito, en la esfera mayor, un sólido poliedro que no toca la esfera menor en su superficie. Q. E. F.

Porisma:

Pero también, si se inscribe en otra esfera un sólido poliedro semejante al sólido poliedro inscrito en la esfera BΓΔE, el sólido poliedro (inscrito) en la esfera BΓΔE guarda con el sólido poliedro (inscrito) en la otra esfera una razón triplicada de la que el diámetro de la esfera BΓΔE guarda con el diámetro

de la otra esfera. Pues si se dividen los sólidos en sus pirámides semejantes en número y disposición, las pirámides serán semejantes. Pero las pirámides semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes [XII 8 Por.]. Entonces, la pirámide cuya base es el cuadrilátero ΚΒΟΣ y su vértice el punto Α guarda con la pirámide dispuesta de modo semejante en la otra esfera una razón triplicada de la que el lado correspondiente guarda con el lado correspondiente, es decir, de la que el radio ΑΒ de la esfera con centro Α (guarda) con el radio de la otra esfera. De manera semejante, cada pirámide de las de la esfera con centro Α guardará con cada pirámide dispuesta de manera semejante de la otra esfera una razón triplicada de la que (guarda) ΑΒ con el radio de la otra esfera. Ahora bien, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes a todos los consecuentes [V 12]; de modo que el sólido poliedro entero (inscrito) en la esfera con centro Α guardará con el sólido poliedro entero (inscrito) en la otra esfera una razón triplicada de la que ΑΒ guarda con el radio de la otra esfera, es decir, de la que el diámetro ΒΔ guarda con el diámetro de la otra esfera. Q. E. D.

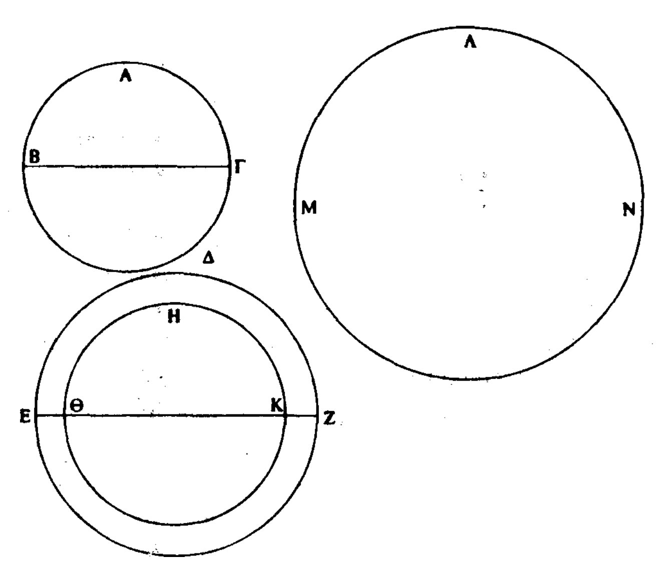
Proposición 18

Las esferas guardan entre sí una razón triplicada de la de sus respectivos diámetros.

Consideremos las esferas ΑΒΓ, ΔΕΖ y sus diámetros ΒΓ, ΕΖ. Digo que la esfera ΑΒΓ guarda con la esfera ΔΕΖ una razón triplicada de la que ΒΓ guarda con ΕΖ.

Pues, si la esfera ΑΒΓ no guarda con la esfera ΔΕΖ una razón triplicada de la que ΒΓ guarda con ΕΖ, entonces, la esfera ΑΒΓ guardará una razón triplicada de la que ΒΓ guarda con ΕΖ

con una esfera menor que ΔEZ o con una mayor. Guárdela en primer lugar con la (esfera) menor HΘK, y considérese ΔEZ en



torno al mismo centro que HΘK, e inscríbase en la esfera mayor el sólido poliedro ΔEZ que no toque la esfera menor HΘK en su superficie [XII 17], e inscríbase también en la esfera ABΓ un sólido poliedro semejante al sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΔEZ; entonces el sólido poliedro (inscrito) en ABΓ guarda con el sólido poliedro (inscrito) en ΔEZ una razón triplicada de la que BΓ guarda con EZ [XII 17 Por.]. Pero la esfera ABΓ guarda con la esfera HΘK una razón triplicada de la que BΓ guarda con EZ; luego, como la esfera ABΓ es a la esfera HΘK, así el sólido poliedro (inscrito) en la esfera ABΓ al sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΔEZ; y, por alternancia, como la esfera ABΓ es al sólido poliedro (inscrito) en ella, así la esfera HΘK al sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΔEZ [V 16]. Pero la esfera ABΓ es mayor que el poliedro (inscrito) en ella; luego la esfe-

ra HΘK es también mayor que el sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΔEZ. Pero también menor –porque es comprendida por él– por tanto, la esfera ABΓ no guarda con una esfera menor que ΔEZ una razón triplicada de la que el diámetro BΓ guarda con el (diámetro) EZ. De manera semejante demostraríamos que la esfera ΔEZ tampoco guarda con una esfera menor que ABΓ una razón triplicada de la que EZ guarda con BΓ.

Digo ahora que la esfera ABΓ tampoco guarda con una esfera mayor que ΔEZ una razón triplicada de la que BΓ guarda con EZ.

Pues, si fuera posible, guárdela con la mayor ΛMN; entonces, por inversión, la esfera ΛMN guarda con la esfera ABΓ una razón triplicada de la que el diámetro EZ guarda con el diámetro BΓ. Pero, como la esfera ΛMN es a la esfera ABΓ, así la esfera ΔEZ a una esfera menor que ABΓ; porque ΛMN es mayor que ΔEZ, según se ha demostrado antes [XII 2 Lema]. Entonces la esfera ΔEZ guarda con una esfera menor que la esfera ABΓ una razón triplicada de la que EZ guarda con BΓ; lo cual se ha demostrado que es imposible. Por tanto, la esfera ABΓ no guarda con una esfera mayor que ΔEZ una razón triplicada de la que BΓ guarda con EZ. Pero se ha demostrado que tampoco con una menor.

Por consiguiente, la esfera ABΓ guarda con la esfera ΔEZ una razón triplicada de la que BΓ guarda con EZ. Q. E. D.

LIBRO DECIMOTERCERO

Proposición 1

Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento mayor junto con el de la mitad de la (recta) entera es cinco veces el cuadrado de la mitad.

Córtese pues la línea recta AB en extrema y media razón por el punto Γ, y sea AΓ el segmento mayor, prolónguese la recta AΔ en línea recta con ΓA y hágase AΔ (igual a) la mitad de AB.

Digo que el cuadrado de ΓΔ es cinco veces el cuadrado de ΔA.

Pues constrúyanse los cuadrados AE, ΔZ de AB, ΔΓ e inscríbase la figura en ΔZ; prolónguese ZΓ hasta H. Ahora bien, como AB se ha dividido en extrema y media razón por Γ, entonces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al cuadrado de AΓ [VI Def. 3 y VI 17]. Y el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es ΓE, mientras que el (cuadrado) de AΓ es ZΘ; entonces, ΓE es igual a ZΘ. Y como BA es el doble de AΔ, mientras que BA es igual a KA y AΔ a AΘ, entonces KA también

es el doble de AΘ. Pero, como KA es a AΘ, así ΓK a ΓΘ [VI 1]; luego ΓK es el doble de ΓΘ. Pero también ΛΘ, ΘΓ son el doble de ΓΘ. Entonces KΓ es igual a ΛΘ, ΘΓ. Pero se ha demostrado que ΓE también es igual a ΘZ; luego el cuadrado entero AE es igual al gnomon [II Def. 2] MNΞ. Y como BA es el doble de AΔ, el cuadrado de BA es el cuádruple del cuadrado de AΔ, es decir, AE (el cuádruple) de ΔΘ. Pero AE es igual al gnomon [II Def. 2] MNΞ; entonces el gnomon MNΞ es el cuádruple de AO; luego el (cuadrado) entero ΔZ es cinco veces AO. Ahora bien, ΔZ es el cuadrado de ΔΓ, mientras que AO es el cuadrado de ΔA; por tanto, el cuadrado de ΓΔ es cinco veces el cuadrado de ΔA.

Por consiguiente, si se corta una recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento mayor junto con el de la mitad de la (recta) entera es cinco veces el cuadrado de la mitad. Q. E. D.[70].

---

[70] Las cinco primeras proposiciones de este libro tienen más bien el carácter de lemas requeridos para pruebas posteriores. Es probable que procedan de Eudoxo, pues Proclo (pág. 67, 6) dice que Eudoxo «incrementó considerablemente el número de teoremas referidos a la sección a partir de Platón». Es de suponer que se trate de la sección áurea.

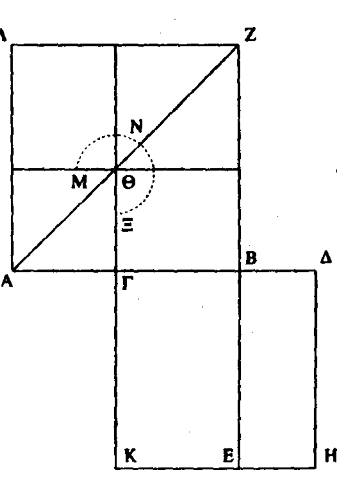
Los mss. contienen una curiosa adición a XIII 1-5 que ofrece *análisis* y *síntesis* de cada una de estas proposiciones. Se trata de un apéndice titulado «¿Qué es análisis y qué es síntesis?» y prosigue: «*Análisis* es la asunción de lo buscado como si ya fuera admitido (y el acceso) por medio de sus implicaciones a algo que se reconoce verdadero. *Síntesis* es una asunción de lo que es reconocido (y el acceso) por medio de sus implicaciones a algo que se admite como verdadero [o, según B y V, a la consecución de lo buscado]». Puede que la matemática griega no haya legado a la posteridad dos nociones metodológicas más sugerentes y más problemáticas que éstas. Los problemas ya nacen de los textos mismos: hay tres versiones clásicas del proceder por análisis y síntesis, a saber: la presente interpolación en los *Elementos*, la glosa de Pappo (*Synagōgé*, VII 634-636, mucho más extensa) y una breve referencia existente en un comentario de Herón a los *Elementos* II transmitido por al-Nayrizi; todas ellas se prestan a equívocos. Los problemas siguen en los diversos planos en que pueden entenderse ambos procedimientos complementarios y guardan

PROPOSICIÓN 2

Si el cuadrado de una línea recta es cinco veces el de un segmento de ella, cuando se corta el doble de dicho segmento en extrema y media razón, el segmento mayor es la parte restante de la recta inicial.

Sea, pues, el cuadrado de la línea recta AB cinco veces el de su segmento AΓ, y sea ΓΔ el doble de AΓ.

Digo que si se corta ΓΔ en extrema y media razón, el segmento mayor es ΓB.



Pues constrúyanse los cuadrados AZ, ΓH de AB, ΓΔ respectivamente, e inscríbase la figura en AZ; trácese BE. Y como el cuadrado de BA es cinco veces el de AΓ, el cuadrado de AZ es cinco veces el de AΘ. Entonces el gnomon MNΞ es el cuádruple de AΘ. Y como ΔΓ es el doble de ΓA, entonces el cuadrado de ΔΓ es el cuádruple del cuadrado de ΓA, es decir ΓH el (cuádruple) de AΘ. Pero se ha demostrado que el gnomon MNΞ

relación con el sentido de uno y otro proceder en cada plano. Cabe entender que se mueven en el plano de las técnicas de resolución de problemas geométricos y, entonces, dirían relación a dos vías solidarias de invención y de confirmación de la solución buscada, aparte de hacer referencia a otras nociones como la de *diorismós*. Cabe entender que se mueven en el plano de la prueba de teoremas o proposiciones y, entonces, dirían relación a dos procesos de inferencia: uno parte de la proposición objeto de la prueba, como si se tratara de

también es el cuádruple de ΑΘ; luego el gnomon ΜΝΞ es igual a ΓΗ. Y como ΔΓ es el doble de ΓΑ, mientras que ΔΓ es igual a ΓΚ, y ΑΓ a ΓΘ, entonces ΚΒ es también el doble de ΒΘ [VI 1]. Pero ΛΘ, ΘΒ son el doble de ΘΒ; luego ΚΒ es igual a ΛΘ, ΘΒ. Pero se ha demostrado que el gnomon entero ΜΝΞ es igual al (cuadrado) entero ΓΗ; entonces el resto ΘΖ es igual a ΒΗ. Y ΒΗ es el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, ΔΒ, porque ΓΔ es igual a ΔΗ; pero ΘΖ es el cuadrado de ΓΒ; luego el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, ΔΒ es igual al cuadrado de ΓΒ. Por tanto, como ΔΓ es a ΓΒ, así ΓΒ a ΒΔ. Ahora bien, ΔΓ es mayor que ΓΒ, entonces también ΓΒ es mayor que ΒΔ. Luego, cuando se corta

una asunción táctica o provisional, y se dirige, mediante el análisis de sus presuposiciones, hacia unos supuestos básicos o unos principios congruentes; la síntesis, a su vez, toma pie en estos principios para establecer en un proceso normal de deducción de consecuencias la proposición en cuestión como un teorema. No faltan, en cualquier caso, nuevos problemas bien de orden lógico —ya advertidos por Aristóteles (*e. g.* en *Analíticos Segundos* 78a7-13)—, bien de orden metodológico. Es probable que ambas nociones pasaran de una aplicación inicial en el ámbito de la resolución de problemas a una proyección posterior en el ámbito de las proposiciones gobernadas por principios y definiciones, aunque nunca perdieran su capacidad heurística y sus usos resolutorios a juzgar por testimonios como el de Pappo. Puede verse un sucinto panorama de estas cuestiones y de su proyección sobre discusiones actuales en lógica y en filosofía de las matemáticas, en L. Vega, *La trama de la demostración*, págs. 90-92. Para colmo, la historia posterior de este legado matemático griego se ha complicado con nuevas confusiones: por ejemplo, las ideas sobre el análisis y la síntesis se reciben en el Occidente medieval de los ss. XIII-XV entremezcladas con otros procedimientos un tanto análogos de investigación e explicación causal (*resolutio, compositio*), que tienen que ver con la tradición arábigo-galénica mucho más que con la tradición arábigo-euclidiana. Un desenlace de estas y otras aventuras es la multiplicidad de sentidos que las nociones de análisis y de síntesis alcanzan a tener con el desarrollo de la ciencia moderna (*e. g.* desde su uso en Descartes hasta su uso en Newton), tanto dentro como fuera de las matemáticas. Puede dar una idea al respecto D. Oldroyd, *El arco del conocimiento*, Barcelona, 1993; *e. g.*, págs. 45-51, 60-63, 117-118, 125-129.

la recta ΓΔ en extrema y media razón, el segmento mayor es ΓB.

Por consiguiente, si el cuadrado de una línea recta es cinco veces el de un segmento de ella, cuando se corta el doble de dicho segmento en extrema y media razón, el segmento mayor es la parte restante de la recta inicial. Q. E. D

LEMA

Hay que demostrar como sigue que el doble de AΓ es mayor que BΓ.

Porque, si no, sea BΓ, si es posible, el doble de ΓA; entonces, el cuadrado de BΓ es cuatro veces el de ΓA; luego los cuadrados de BΓ, ΓA son cinco veces el de ΓA. Pero se ha supuesto que el cuadrado de BA es cinco veces el de ΓA; entonces el cuadrado de BA es igual a los (cuadrados) de BΓ, ΓA; lo cual es imposible [II 4]. Por tanto, ΓB no es el doble de AΓ. De manera semejante demostraríamos que tampoco una recta menor que ΓB es el doble de ΓA; porque es todavía más absurdo.

Por consiguiente, el doble de AΓ es mayor que ΓB. Q. E. D.[71].

PROPOSICIÓN 3

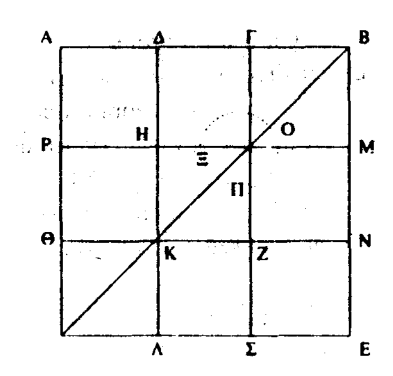
Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento menor junto con el de la mitad del segmento mayor es cinco veces el cuadrado de la mitad del segmento mayor.

[71] Heiberg duda con razón de la autenticidad del lema y no deja de parecerle insólito o desmesurado el estilo empleado en la alusión a la reducción al absurdo. Dice literalmente: *Dubito an hoc lemma genuinum non sit, neque enim opus est, et dicendi genus lin. 18 paulo insolentius est.*

Córtese, pues, una recta AB en extrema y media razón por el punto Γ, y sea AΓ el segmento mayor, y divídase AΓ en dos partes iguales por el (punto) Δ.

Digo que el cuadrado de BΔ es cinco veces el de ΔΓ.

Pues constrúyase el cuadrado AE de AB, e inscríbase la figura doble. Como AΓ es el doble de ΔΓ, entonces el cuadrado



de AΓ es el cuádruple del (cuadrado) de ΔΓ, es decir PΣ (el cuádruple) de ZH. Y como el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al cuadrado de AΓ, y el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es ΓE, entonces ΓE es igual a PΣ. Pero PΣ es el cuádruple de ZH; luego ΓE es también el cuádruple de ZH. Puesto que AΔ es, a su vez, igual a ΔΓ, también ΘK es igual a KZ. De modo que el cuadrado HZ es igual al cuadrado ΘΛ. Luego HK es igual a KΛ, es decir MN a NE; de modo que MZ es también igual a ZE. Pero MZ es igual a ΓH; entonces ΓH es igual a ZE. Añádase a ambos ΓN; entonces el gnomon ΞOΠ es igual a ΓE. Pero se ha demostrado que ΓE es el cuádruple de HZ; luego el gnomon ΞOΠ es también el cuádruple del cuadrado ZH. Por tanto el gnomon ΞOΠ y el cuadrado ZH son cinco veces ZH. Pero el gnomon ΞOΠ y el cuadrado ZH son el (cuadrado) ΔN. Y ΔN es el cuadrado de ΔB, mientras que HZ es el cuadrado de ΔΓ. Por tanto, el cuadrado de ΔB es cinco veces el (cuadrado) de ΔΓ. Q. E. D.

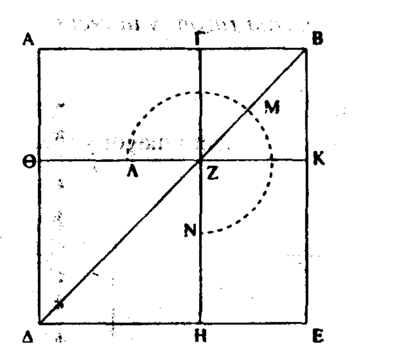
PROPOSICIÓN 4

Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado de la recta entera y el del segmento menor juntos son el triple del cuadrado del segmento mayor.

Sea AB la recta y córtese en extrema y media razón por el punto Γ, y sea AΓ el segmento mayor.

Digo que los cuadrados de AB, BΓ son el triple del cuadrado de ΓA.

Constrúyase, pues, el cuadrado AΔEB de AB e inscríbase la figura. Pues bien, como AB se ha cortado en extrema y media



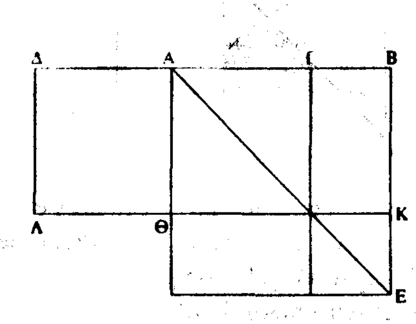
razón por Γ, y AΓ es el segmento mayor, entonces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al cuadrado de AΓ [VI Def. 3; VI 17]. Y el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es AK, mientras que el (cuadrado) de AΓ es ΘH; entonces AK es igual a ΘH. Y como AZ es igual a ZE, añádase a ambos ΓK; entonces el (área) entera AK es igual al (área) entera ΓE; luego AK, ΓE son el doble de AK. Pero AK, ΓE son el gnomon ΛMN y el cuadrado ΓK; entonces el gnomon ΛMN y el cuadrado ΓK son el doble de AK. Pero además se ha demostrado que AK es

igual a ΘH; luego el gnomon ΛMN y los cuadrados ΓK, ΘH son el triple del cuadrado ΘH. Ahora bien, el gnomon ΛMN y los cuadrados ΓK, ΘH son el (cuadrado) entero AE y ΓK, que son precisamente los cuadrados de AB, BΓ, mientras que HΘ es el cuadrado de AΓ. Por tanto, los cuadrados de AB, BΓ son el triple del cuadrado de AΓ. Q. E. D.

Proposición 5

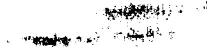
Si se corta una línea recta en extrema y media razón y se le añade (otra) igual al segmento mayor, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y la recta inicial es el segmento mayor.

Córtese, pues, la línea recta AB en extrema y media razón por el punto Γ; sea AΓ el segmento mayor y (hágase) AΔ igual a AΓ.



Digo que la recta ΔB se ha cortado en extrema y media razón por el punto A, y que la recta inicial, AB, es el segmento mayor.

Pues construyase el cuadrado AE de AB, e inscríbase la figura. Como AB se ha cortado en extrema y media razón por el



punto Γ, entonces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al (cuadrado) de AΓ [VI Def. 3; VI 17]. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es ΓE, mientras que el cuadrado de AΓ es ΓΘ; entonces ΓE es igual a ΘΓ. Pero ΘE es igual a ΓE, y ΔΘ a ΘΓ; entonces, ΔΘ es igual a ΘE. Luego el (área) entera ΔK es igual al (área) entera AE. Y ΔK es el (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔA, porque AΔ es igual a ΔΛ; mientras que AE es el (cuadrado) de AB; luego el (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔA es igual al (cuadrado) de AB. Entonces, como ΔB es a BA, así BA a AΔ [VI 17]. Pero ΔB es mayor que BA; luego BA es también mayor que AΔ [VI 14].

Por consiguiente, se ha cortado ΔB en extrema y media razón por el (punto) A, y AB es el segmento mayor. Q. E. D.

Proposición 6 [72]

Si una recta expresable se corta en extrema y media razón, cada uno de los segmentos es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

Sea AB la recta expresable y córtese en extrema y media razón por el punto Γ, y sea AΓ el segmento mayor.

---

[72] Esta proposición parece interpolada. P cuenta con ella, pero el copista dice que «este teorema no se encuentra en la mayoría de las copias de nueva recensión, si bien se halla en las copias de la antigua». En primer lugar, hay un escolio a XIII 17 que prueba lo mismo que XIII 6 y que no tendría sentido si XIII 6 lo hubiera precedido. De ahí se infiere que, cuando el escolio fue escrito, esta proposición no se habría interpolado todavía. Por otra parte, P tiene esta proposición antes de la prueba alternativa de XIII 5; esta prueba se considera interpolada y parece que XIII 6 debe ser una interpolación posterior que la separa de la proposición a que pertenecía. Por último, existen razones para sospechar de la propia proposición porque, mientras el enunciado establece

Digo que cada una de las (rectas) AΓ, ΓB es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

Prolónguese, pues, BA y hágase AΔ (igual) a la mitad de BA. Pues bien, como la recta AB se ha cortado en extrema y



media razón por el punto Γ y se ha añadido al segmento mayor AΓ la (recta) AΔ que es la mitad de AB, entonces el cuadrado de ΓΔ es cinco veces el de AΔ [XIII 1]. Luego el (cuadrado) de ΓΔ guarda con el (cuadrado) de ΔA la razón que un número guarda con un número; por tanto el (cuadrado) de ΓΔ es conmensurable con el (cuadrado) de ΔA [X 6]. Pero el (cuadrado) de ΔA es expresable, porque ΔA es expresable, siendo la mitad de AB que es expresable; entonces el cuadrado de ΓΔ es expresable [X Def. 4]. Luego ΓΔ también es expresable. Ahora bien, como el (cuadrado) de ΓΔ no guarda con el cuadrado de ΔA la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces ΓΔ es inconmensurable en longitud con ΔA [X 9]; luego ΓΔ, ΔA son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, AΓ es una apótoma [X 73]. A su vez, como AB se ha cortado en extrema y media razón y su segmento mayor es AΓ, entonces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al cuadrado de AΓ [VI Def. 3, VI 17]. Luego el cuadrado de la apótoma AΓ, aplicado a la (recta) expresable AB, produce la anchura BΓ; pero el cuadrado de una apótoma, aplicado a una

que cada segmento de recta es una apótoma, la proposición añade que el segmento menor es una primera apótoma, punto que no está presente en el escolio en p. Lo que realmente se requiere en XIII 17 es que el segmento mayor sea una apótoma. Es probable que Euclides asumiera que este hecho resultaba bastante claro a partir de XIII 1, y que ni escribiera XIII 6 ni la referencia a su enunciado en XIII 17.

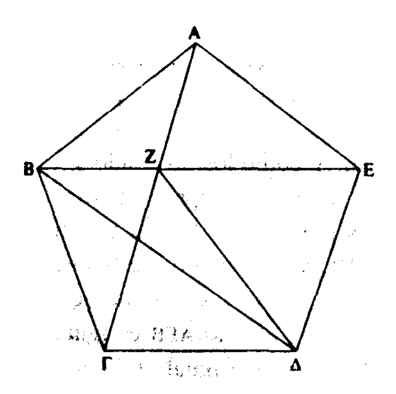
(recta) expresable, produce como anchura una primera apótoma [X 97]; por tanto ΓΒ es una primera apótoma. Pero se ha demostrado que ΓΑ es también una apótoma.

Por consiguiente, si una recta expresable se corta en extrema y media razón, cada uno de los segmentos es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

Proposición 7

Si tres ángulos de un pentágono equilátero, sean sucesivos o no, son iguales, el pentágono será equiangular.

Sean, pues, en primer lugar, iguales entre sí, los tres ángulos sucesivos correspondientes a Α, Β, Γ, del pentágono equilátero ΑΒΓΔΕ.



Digo que el pentágono ΑΒΓΔΕ es equiangular.

Pues trácense ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. Y como los dos (lados) ΓΒ, ΒΑ son iguales respectivamente a ΒΑ, ΑΕ, y el ángulo ΓΒΑ es igual al ángulo ΒΑΕ, entonces, la base ΑΓ es igual a la base ΒΕ, y el triángulo ΑΒΓ es igual al triángulo ΑΒΕ y los ángulos restantes,

aquellos a los que subtienden los lados iguales, serán también iguales respectivamente [I 4], es decir: el (ángulo) BΓA al (ángulo) BEA, y el (ángulo) ABE al (ángulo) ΓAB; de modo que el lado AZ es también igual al lado BZ [I 6]. Pero se ha demostrado que la (recta) entera AΓ es también igual a la (recta) entera BE; luego la (parte) restante ZΓ es igual a la (parte) restante ZE. Pero ΓΔ también es igual a ΔE. Entonces los dos (lados) ZΓ, ΓΔ son iguales a los dos (lados) ZE, EΔ; y su base ZΔ es común; entonces el ángulo ZΓΔ es igual al (ángulo) ZEΔ [I 8]. Pero se ha demostrado que también el (ángulo) BΓA es igual al (ángulo) AEB; entonces el ángulo entero BΓΔ es igual al ángulo entero AEΔ. Ahora bien, se ha supuesto que el (ángulo) E es igual a los ángulos correspondientes a A, B; luego el (ángulo) AEΔ es igual a los ángulos correspondientes a A, B. De manera semejante demostraríamos que el ángulo ΓΔE es también igual a los ángulos correspondientes a A, B, Γ. Por tanto, el pentágono ABΓΔE es equiangular.

Pero ahora no sean iguales los ángulos sucesivos, sino que sean iguales los correspondientes a los puntos A, Γ, Δ.

Digo que también en este caso el pentágono ABΓΔE es equiangular.

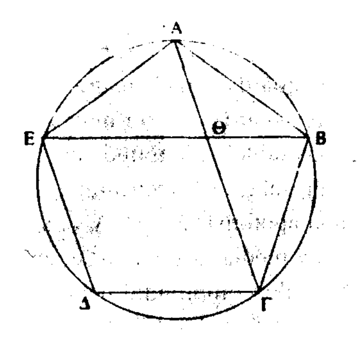
Trácese, pues, BΔ. Y como los dos (lados) BA, AE son iguales a los dos (lados) BΓ, ΓΔ y comprenden ángulos iguales, entonces la base BE es igual a la base BΔ, y el triángulo ABE es igual al triángulo BΓΔ, y los ángulos restantes, aquellos a los que subtienden ángulos iguales, serán también iguales respectivamente [I 4]. Luego el ángulo AEB es igual al ángulo ΓΔB. Pero el ángulo BEΔ es también igual al ángulo BΔE, porque el lado BE es también igual al lado BΔ [I 5]. Entonces, el ángulo entero AEΔ es igual al ángulo entero ΓΔE. Pero se ha supuesto que el ángulo ΓΔE es igual a los ángulos A, Γ; luego el ángulo AEΔ es igual a los correspondientes a A, Γ. Por lo mismo el ángulo ABΓ es también igual a los ángulos correspondientes a A,

Γ, Δ. Por consiguiente, el pentágono ΑΒΓΔΕ es equiangular. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 8

Si en un pentágono equilátero y equiangular, unas rectas subtienden dos ángulos sucesivos, se cortan entre sí en extrema y media razón y sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono.

Subtiendan las rectas ΑΓ, ΒΕ que se cortan en el punto Θ a los dos ángulos sucesivos correspondientes a Α, Β del pentágono equilátero y equiangular ΑΒΓΔΕ.



Digo que cada una de ellas queda cortada en extrema y media razón por el punto Θ, y que sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono.

Circunscríbase, pues, en torno al pentágono ΑΒΓΔΕ, el círculo ΑΒΓΔΕ. Y como las dos rectas ΕΑ, ΑΒ son iguales a las dos (rectas) ΑΒ, ΒΓ y comprenden ángulos iguales, entonces, la base ΒΕ es igual a la base ΑΓ, y el triángulo ΑΒΕ es igual al triángulo ΑΒΓ y los ángulos restantes, aquellos a los que subtienden los la-

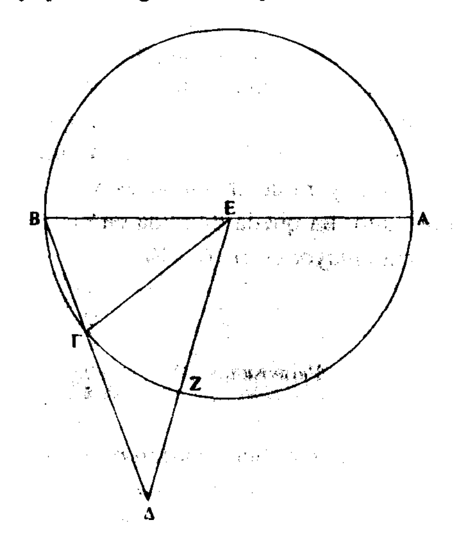
dos iguales, serán también iguales respectivamente [I 4]. Entonces el ángulo ΒΑΓ es igual al ángulo ΑΒΕ; luego el (ángulo) ΑΘΕ es el doble del (ángulo) ΒΑΓ, porque la circunferencia ΕΔΓ es también el doble de la (circunferencia) ΓΒ [III 28, VI 33]; entonces el ángulo ΘΑΕ es igual al (ángulo) ΑΘΕ; de modo que también la recta ΘΕ es igual a la (recta) ΕΑ, es decir, es igual a la recta ΑΒ [I 6]. Y como la recta ΒΑ es igual a la (recta) ΑΕ, también el ángulo ΑΒΕ es igual al (ángulo) ΑΕΒ [I 5]. Pero se ha demostrado que el ángulo ΑΒΕ es igual al ángulo ΒΑΘ; luego el (ángulo) ΒΕΑ también es igual al (ángulo) ΒΑΘ. Y el ángulo ΑΒΕ es común a los dos triángulos ΑΒΕ y ΑΒΘ; entonces el ángulo restante ΒΑΕ es igual al (ángulo) restante ΑΘΒ [I 32]; luego el triángulo ΑΒΕ tiene sus ángulos iguales a los del (triángulo) ΑΒΘ; por tanto, proporcionalmente, como ΕΒ es a ΒΑ, así ΑΒ a ΒΘ [VI 4]. Pero ΒΑ es igual a ΕΘ; entonces, como ΒΕ es a ΕΘ, así ΕΘ a ΘΒ. Pero ΒΕ es mayor que ΕΘ; luego ΕΘ es mayor que ΘΒ [V 14]. Por tanto, ΒΕ queda cortada en extrema y media razón por el punto Θ, y su segmento mayor ΘΕ es igual al lado del pentágono. De manera semejante demostraríamos que ΑΓ también queda cortada en extrema y media razón por el punto Θ, y que su segmento mayor ΓΘ es igual al lado del pentágono. Q. E. D.

Proposición 9

Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono.

Sea ΑΒΓ el círculo y, de las figuras inscritas en el círculo ΑΒΓ, sea ΒΓ el lado del decágono y ΓΔ el del hexágono, y estén en línea recta.

Digo que la recta entera BΔ queda cortada en extrema y media razón y que su segmento mayor es el lado del hexágono.



Tómese, pues, el punto E como centro del círculo, y trácense EB, EΓ, EΔ, y prolónguese BE hasta A. Como BΓ es el lado del decágono equilátero, entonces la circunferencia AΓB es cinco veces la circunferencia BΓ; luego la circunferencia AΓ es el cuádruple de ΓB. Pero, como la circunferncia AΓ es a la circunferencia ΓB, así el ángulo AEΓ al (ángulo) ΓEB [VI 33]; entonces el (ángulo) AEΓ es el cuádruple del ángulo ΓEB. Y como el ángulo EBΓ es igual al (ángulo) EΓB [I 5], entonces el ángulo AEΓ es el doble del (ángulo) EΓB [I 32]. Y como la recta EΓ es igual a la (recta) ΓΔ, porque cada una de ellas es igual al lado del hexágono inscrito en el círculo ABΓ [IV 15 Por.], el ángulo ΓEΔ es también igual al ángulo ΓΔE [I 5]; entonces el ángulo EΓB es el doble del (ángulo) EΔΓ [I 32]. Pero se ha demostrado que el (ángulo) EΓB es el doble del (ángulo) AEΓ; luego el (ángulo) AEΓ es el cuádruple del (ángulo) EΔΓ. Pero se ha de-

mostrado que el ángulo AEΓ es el cuádruple del ángulo BEΓ; luego el (ángulo) EΔΓ es igual al (ángulo) BEΓ. Ahora bien, el ángulo EBΔ es común a los dos triángulos BEΓ y BEΔ; entonces el (ángulo) restante BEΔ es igual al ángulo restante EΓB [I 32]; luego el triángulo EBΔ es de ángulos iguales a los del triángulo EBΓ. Por tanto, proporcionalmente, como ΔB es a BE, así EB a BΓ [VI 4]. Pero EB es igual a ΓΔ. Luego, como BΔ es a ΔΓ, así ΔΓ a ΓB. Pero BΔ es mayor que ΔΓ; entonces ΔΓ también es mayor que ΓB. Por tanto, BΔ queda dividida en extrema y media razón y su segmento mayor es ΔΓ. Q. E. D.

Proposición 10

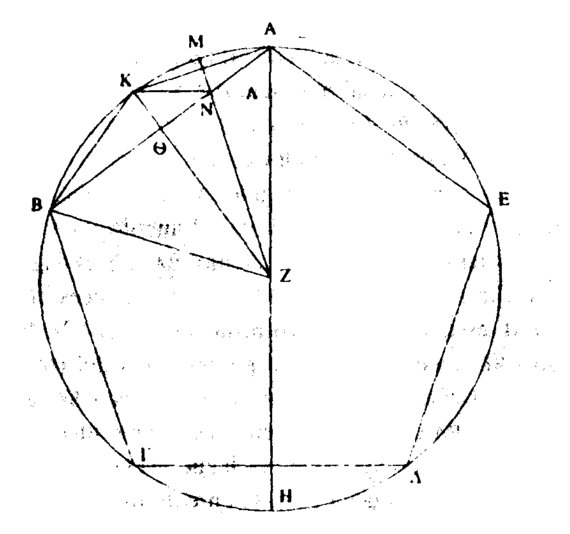
Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del pentágono es igual a los (cuadrados) de los (lados) del hexágono y el decágono inscritos en el mismo círculo.

Sea ABΓΔE el círculo, e inscríbase en el círculo ABΓΔE el pentágono equilátero ABΓΔE.

Digo que el cuadrado del lado del pentágono ABΓΔE es igual a los de los lados del hexágono y el decágono inscritos en el círculo ABΓΔE.

Pues tómese el punto Z como centro del círculo y, una vez trazada AZ, prolónguese hasta el punto H; trácese ZB y trácese, desde Z, ZΘ perpendicular a AB, y prolónguese hasta el (punto) K y trácense AK, KB; trácese a su vez ZΛ perpendicular a AK y prolónguese hasta M, y trácese KN. Como la circunferencia ABΓH es igual a la circunferencia AEΔH y, en ellas, ABΓ es igual a AEΔ, entonces el resto, la circunferencia ΓH, es igual al resto, la circunferencia HΔ. Y ΓΔ es el (lado) del pentágono; entonces ΓH es el (lado) del decágono. Y como ZA es igual a ZB y ZΘ es

perpendicular, entonces el ángulo AZK es también igual al (ángulo) KZB [I V, I 26]. De modo que la circunferencia AK es



igual a KB [III 26], luego la circunferencia AB es el doble de la circunferencia BK; por tanto la recta AK es un lado del decágono. Por lo mismo AK también es el doble de KM. Ahora bien, como la circunferencia AB es el doble de la circunferencia BK, mientras que la circunferencia ΓΔ es igual a la circunferencia AB, entonces la circunferencia ΓΔ es el doble de la circunferencia BK. Pero la circunferencia ΓΔ es el doble de la circunferencia ΓH; luego la circunferencia ΓH es igual a la circunferencia BK. Pero BK es el doble de KM, porque también lo es KA; entonces ΓH es el doble de KM. Pero además la circunferencia ΓB es el doble de la circunferencia BK, porque la circunferencia ΓB es igual a BA. Por tanto, la circunferencia entera HB es el doble de BM; de modo que también el ángulo HZB es el doble del ángulo BZM [VI 33]. Pero el (ángulo) HZB es también el doble del (ángulo) ZAB, porque el (ángulo) ZAB es igual al (ángulo)

ABZ. Luego el ángulo BZN es también igual al ángulo ZAB. Pero el ángulo ABZ es común a los dos triángulos ABZ, BZN; entonces el (ángulo) restante AZB es igual al (ángulo) restante BNZ [I 32]. Luego el triángulo ABZ es de ángulos iguales a los del triángulo BZN. Por tanto, proporcionalmente, como la recta AB es a la (recta) BZ, así ZB a BN [VI 4]; así pues, el (rectángulo) AB, BN es igual al cuadrado de BZ [VI 17]; como a su vez AΛ es igual a ΛK y ΛN es común y forma ángulos rectos, entonces la base KN es igual a la base ΛN [I 4]; luego el ángulo ΛKN es igual al ángulo ΛΑΝ. Pero el (ángulo) ΛΑΝ es igual al (ángulo) KBN; entonces el (ángulo) ΛKN es igual al ángulo KBN. Y el (ángulo) correspondiente a A es común a los dos triángulos, AKB y AKN. Entonces el (ángulo) restante AKB es igual al ángulo restante KNA [I 32]; luego el triángulo KBA es de ángulos iguales a los del triángulo KNA. Por tanto, proporcionalmente, como la recta BA es a AK, así KA a AN [VI 4]; luego el (rectángulo) BA, AN es igual al cuadrado de AK [VI 17]. Pero se ha demostrado que también el (rectángulo) AB, BN es igual al (cuadrado) de BZ; entonces el (rectángulo) AB, BN junto con el (rectángulo) BA, AN, que es el (cuadrado) de BA, es igual al (cuadrado) de BZ junto con el (cuadrado) de AK. Ahora bien, BA es el lado del pentágono, BZ del hexágono y AK del decágono.

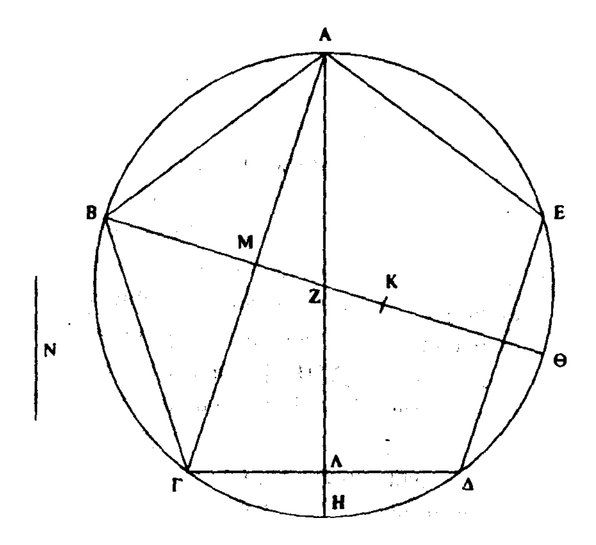
Por consiguiente, el cuadrado del lado del pentágono regular es igual al del hexágono y el decágono inscritos en el mismo círculo. Q. E. D.

Proposición 11

Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo que tenga diámetro expresable, el lado del pentágono es la (recta) sin razón expresable llamada menor.

Inscríbase, pues el pentágono equilátero ΑΒΓΔΕ en el círculo ΑΒΓΔΕ que tiene el diámetro expresable.

Digo que el lado del pentágono es la (recta) sin razón expresable llamada menor.



Pues tómese el punto Ζ como centro del círculo y trácense ΑΖ, ΖΒ y prolónguense hasta los puntos Η, Θ y trácese ΑΓ y hágase ΖΚ igual a la cuarta parte de ΑΖ. Pero ΑΖ es expresable, entonces ΖΚ es también expresable. Pero ΒΖ también es expresable; entonces la (recta) entera ΒΚ es expresable. Y como la circunferencia ΑΓΗ es igual a la circunferencia ΑΔΗ y en ellas ΑΒΓ es igual a ΑΕΔ, entonces, el resto ΓΗ es igual al resto ΗΔ. Luego, si trazamos ΑΔ, se concluye que los ángulos correspondientes a Λ son rectos y que ΓΔ es el doble de ΓΛ. Por lo mismo los (ángulos) correspondientes a Μ son rectos y ΑΓ es el doble de ΓΜ. Pues bien, como el ángulo ΑΛΓ es igual al (ángulo) ΑΜΖ y el (ángulo) ΛΑΓ es común a los dos triángulos ΑΓΛ y ΑΜΖ, entonces el (ángulo) restante ΑΓΛ es igual al (ángulo) restante ΜΖΑ

[I 32]. Luego el triángulo ΑΓΛ es de ángulos iguales a los del triángulo ΑΜΖ; por tanto, proporcionalmente, como ΛΓ es a ΓΑ, así ΜΖ a ΖΑ; y (tomando) los dobles de los antecedentes, como el doble de ΛΓ es a ΓΑ, así el doble de ΜΖ a ΖΑ. Pero como el doble de ΜΖ es a ΖΑ, así ΜΖ a la mitad de ΖΑ; entonces también, como el doble de ΛΓ es a ΓΑ, así ΜΖ a la mitad de ΖΑ. Y (tomando) la mitad de los consecuentes, como el doble de ΛΓ es a la mitad de ΓΑ, así ΜΖ a la cuarta parte de ΖΑ. Ahora bien, el doble de ΛΓ es ΔΓ; la mitad de ΓΑ, ΓΜ; y la cuarta parte de ΖΑ, ΖΚ; entonces, como ΔΓ es a ΓΜ, así ΜΖ a ΖΚ. Y, por composición, como la suma de [illegible] así ΜΚ a ΚΖ [V 18]; luego, como [illegible] ΓΜ es al cuadrado de ΓΜ, así el cuadrado de ΜΚ al cuadrado de ΚΖ. Y puesto que, si se corta en extrema y media razón la recta que subtiende dos lados del pentágono, como ΑΓ, el segmento mayor es igual al lado del pentágono, es decir, ΔΓ [XIII 8], mientras que el cuadrado del segmento mayor añadido a la mitad de la (recta) entera es [illegible] de la (recta) entera [XIII 1], y ΓΜ es la mitad de la recta entera ΑΓ, entonces, el cuadrado de ΔΓΜ, (tomada) como una [illegible] es cinco veces el cuadrado de ΓΜ. Pero se ha [illegible] que, como el cuadrado de ΔΓΜ, tomada como una recta, es al cuadrado de ΓΜ, así el cuadrado de ΜΚ al de ΚΖ. Entonces, el cuadrado de ΜΚ es cinco veces el cuadrado de ΚΖ. Pero el cuadrado de ΚΖ es expresable, porque el diámetro es expresable; luego el cuadrado de ΜΚ es expresable. Por tanto, ΜΚ [illegible] cuádruple de ΖΚ, en[illegible] cuadrado de ΒΚ es veinticinco veces el cuadrado de ΚΖ. Pero el cuadrado de ΜΚ es cinco veces el cuadrado de ΚΖ. Entonces, el cuadrado de ΒΚ es cinco veces el cuadrado de ΚΜ; luego el cuadrado de ΒΚ no guarda con el cuadrado de ΚΜ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; por tanto ΒΚ es inconmensurable en longitud con ΚΜ [X 9]. Y cada una de ellas es expresable;

así pues, BK, KM son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Pero si se quita de una recta expresable otra recta expresable conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera, la (recta) restante, sin razón expresable, es una apótoma; por tanto MB es una apótoma y MK la adjunta a ella [X 73].

Digo ahora que además MB es la cuarta (apótoma). Sea el cuadrado de N igual a aquello en lo que el (cuadrado) de BK es mayor que el (cuadrado) de KM; entonces el cuadrado de BK es mayor que el cuadrado de KM en el cuadrado de N. Ahora bien, como KZ es conmensurable con ZB, también, por composición, KB es conmensurable con ZB [X 15]. Pero BZ es conmensurable con BΘ; luego BK también es conmensurable con BΘ [X 12]. Y como el cuadrado de BK es cinco veces el cuadrado de KM, entonces el cuadrado de BK guarda con el cuadrado de KM la razón que 5 guarda con 1 [73]. Entonces, por conversión, el cuadrado de BK guarda con el cuadrado de N la razón que 5 guarda con 4 [V 19 Por.], no la que un (número) cuadrado guarda con un (número) cuadrado; entonces BK es inconmensurable con N [X 9]; luego el cuadrado de BK es mayor que el cuadrado de KM en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (BK); y puesto que el cuadrado de la (recta) entera BK es mayor que el cuadrado de la adjunta, KM, en el cuadrado de (una recta) inconmensurable con ella (BK), y la recta entera, BK, es conmensurable con la recta expresable propuesta, BΘ, entonces MB es una cuarta apótoma [X Ter. Def. 4]. Pero el rectángulo comprendido por una recta expresable y una cuarta apótoma no tiene razón expresable y el lado del cuadrado no tiene razón expresable y se llama «menor» [X 94]. Pero el cuadrado de AB es igual al rectángulo ΘB, BM, porque, si se traza AΘ, el triángulo ABΘ es de ángulos iguales a los del (triángulo) ABM y como ΘB es a BA, así AB a BM.

[73] Números en el original.

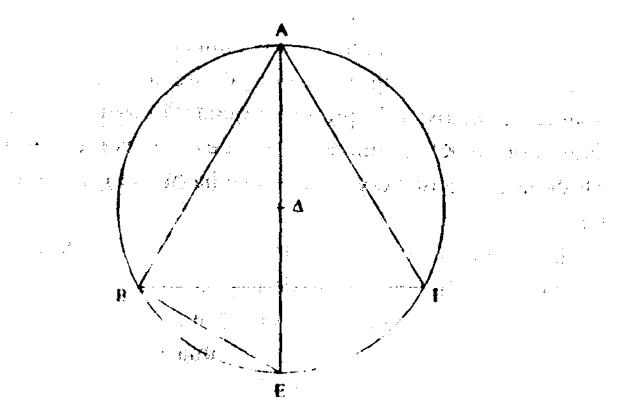
Por consiguiente, el lado AB del pentágono es la (recta) sin razón expresable llamada menor. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 12

Si se inscribe un triángulo equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del triángulo es el triple del (cuadrado) del radio del círculo.

Sea ABΓ el círculo e inscríbase en él el triángulo equilátero ABΓ.

Digo que el cuadrado de un lado del triángulo ABΓ es el triple del (cuadrado) del radio del círculo ABΓ.



Tómese, pues, Δ como centro del círculo ABΓ, y, una vez trazada AΔ prolónguese hasta E y trácese BE. Ahora bien, como ABΓ es un triángulo equilátero, entonces la circunferencia BEΓ es la tercera parte de la circunferencia del círculo ABΓ. Luego la circunferencia BE es la sexta parte de la circunferencia del círculo. Por tanto, la recta BE es (el lado) de un hexágono; así

pues, es igual al radio ΔE [VI 15 Por.]. Y como AE es el doble de ΔE, el cuadrado de AE es el cuádruple del de EΔ, es decir del de BE. Pero el cuadrado de AE es igual a los cuadrados de AB, BE [III 31, I 47] entonces los cuadrados de AB, BE son el cuádruple del (cuadrado) de BE. Luego, por separación, el (cuadrado) de AB es el triple del de BE. Pero BE es igual a ΔE; por tanto, el cuadrado de AB es el triple del de ΔE.

Por consiguiente, el cuadrado del lado del triángulo es el triple del (cuadrado) del radio [del círculo]. Q. E. D.

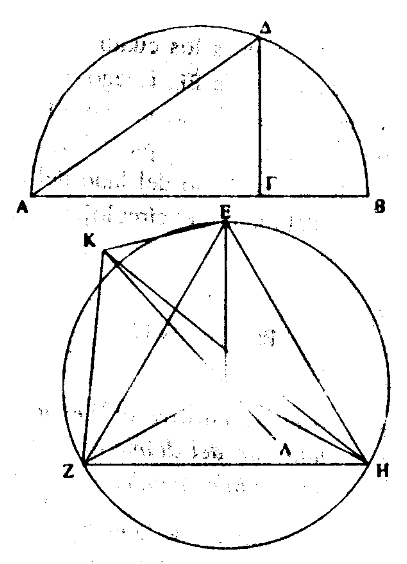
Proposición 13

Construir una pirámide, envolverla[74] *en una esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.*

Póngase AB como diámetro de la esfera dada y córtese por el punto Γ, de modo que AΓ sea el doble de ΓB; descríbase sobre AB el semicírculo AΔB; trácese ΓΔ formando ángulos rectos con AB desde el punto Γ, y trácese ΔA; póngase el círculo EZH que tenga el radio igual a ΔΓ e inscríbase en el círculo EZH el triángulo equilátero EZH [IV 2]; tómese el punto Θ como centro del círculo [III 1]; trácense EΘ, ΘZ, ΘH; desde el punto Θ levántese ΘK formando ángulos rectos con el plano del círculo EZH [XI 12] y quítese de ΘK la (recta) ΘK igual a AΓ, y trácense KE, KZ, KH; ahora bien, como KΘ forma ángulos rectos con el plano del círculo EZH, formará también ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano del círculo EZH [XI Def. 3]. Pero cada una de las rectas ΘE, ΘZ, ΘH la toca:

[74] Traduzco *perilambánō* por «envolver» para distinguirlo de *engráphō* «inscribir» o *perigráphō* «circunscribir».

entonces ΘK forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) ΘE, ΘZ, ΘH. Y como AΓ es igual a ΘK y ΓΔ a ΘE, y comprenden



ángulos rectos, entonces la base [illegible] es ig[illegible] a la base KE [I 4]. [illegible] también igual a [illegible]A; luego las tres (rectas) KE, KZ, KH son iguales entre sí. Y como AΓ es el doble de ΓB, entonces AB es el triple de BΓ. Pero [illegible] AB es a BΓ [illegible]ado de AΔ al cuadrado de ΔΓ como se demostrará enseguida [75]. Entonces el cuadrado de AΔ es el triple del cuadrado de ΔΓ. Pero el cuadrado de ZE es también el triple del cuadrado de EΘ [XIII 12], y ΔΓ es igual a EΘ; entonces ΔA es igual a EZ. Ahora bien, se ha demostrado que ΔA es igual a cada una de [illegible] KH; entonces las

[75] Se refiere al lema que sigue a la proposición, lema cuya autenticidad se pone en duda.

(rectas) EZ, ZH, HE son iguales a las (rectas) KE, KZ, KH respectivamente; luego los cuatro triángulos EZH, KEZ, KZH, KEH son equiláteros. Por tanto, a partir de cuatro triángulos equiláteros, se ha construido una pirámide cuya base es el triángulo EZH y su vértice el punto K.

Ahora hay que envolverla en la esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.

Prolónguese, pues, la recta ΘΛ en línea recta con KΘ, y hágase ΘΛ igual a ΓB. Y dado que, como AΓ es a ΓΔ, así ΓΔ a ΓB [VI 8 Por.] mientras que AΓ es igual a KΘ, ΓΔ a ΘE y ΓB a ΘΛ, entonces como KΘ es a ΘE, así EΘ a ΘΛ; luego el (rectángulo comprendido) por KΘ, ΘΛ es igual al cuadrado de EΘ [VI 17]. Y cada uno de los ángulos KΘE, EΘΛ es recto; entonces el semicírculo descrito sobre KΛ pasará también por el (punto) E [VI 8; III 31]. Entonces, si permaneciendo fija KΛ, se hace girar el semicírculo y se vuelve a la posición de donde empezó a moverse, pasará también por los puntos Z, H, pues trazadas las rectas ZΛ, ΛH, los ángulos correspondientes a Z, H resultan parejamente rectos; y la pirámide quedará envuelta en la esfera dada. Porque KΛ, el diámetro de la esfera, es igual al diámetro AB de la esfera dada, ya que KΘ se ha hecho igual a AΓ y ΘΛ a ΓB.

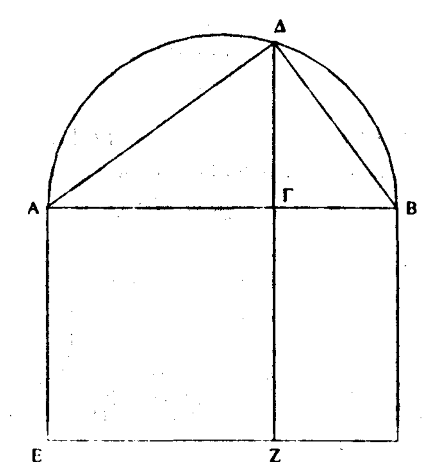
Digo además que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.

Pues como AΓ es el doble de ΓB, entonces AB es el triple de BΓ; luego, por conversión, BA es una vez y media AΓ. Pero como BA es a AΓ, así el cuadrado de BA al de AΔ. Luego el cuadrado de BA es una vez y media el de AΔ. Y BA es el diámetro de la esfera dada y AΔ es igual al lado de la pirámide.

Por consiguiente, el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide. Q. E. D.

LEMA

Hay que demostrar que, como AB es a BΓ, así el cuadrado de AΔ al cuadrado de ΓΔ.

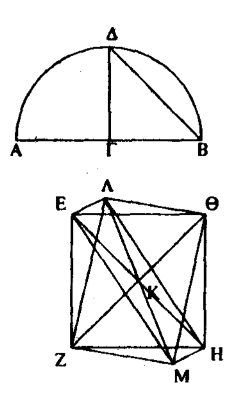


Póngase, pues, la figura del semicírculo, y trácese ΔB; constrúyase sobre AΓ el cuadrado EΓ y complétese el paralelogramo ZB. Pues bien, dado que, por ser el triángulo ΔAB de ángulos iguales a los de ΔAΓ, como BA es a AΔ, así ΔA a AΓ [VI 8; VI 4], entonces el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ es igual al (cuadrado) de AΔ [VI 17]. Y dado que, como AB es a BΓ, así EB a BZ [VI 1] y EB es el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ —porque EA es igual a AΓ— mientras que BZ es el rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, entonces, como AB es a BΓ, así el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ al (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ es igual al cuadrado de AΔ, mientras que el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es igual al (cuadrado) de ΔΓ, porque la perpendicular ΔΓ es la media proporcional de los segmentos AΓ, ΓB de la base por ser recto el ángulo AΔB [VI 8 Por.]. Entonces, como AB es a BΓ, así el cuadrado de AΔ al cuadrado de ΔΓ. Q. E. D.

Proposición 14

Construir un octaedro y envolverlo en una esfera como en la (proposición) anterior, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del (cuadrado) del lado del octaedro.

Póngase el diámetro AB de la esfera dada y divídase en dos por el punto Γ; descríbase sobre AB el semicírculo AΔB, y trácese, desde el punto Γ, ΓΔ formando ángulos rectos con AB; trácese ΔB; póngase el cuadrado EZHΘ que tenga cada uno de sus lados igual a ΔB, y trácense ΘZ, EH; levántese, a partir del punto K, la recta KΛ formando ángulos rectos con el plano del cuadrado EZHΘ [XI 12] y prolónguese hacia el otro lado del plano como KM, y de las (rectas) KΛ, KM quítense respectivamente KΛ, KM iguales a una de las (rectas) EK, ZK, HK, ΘK y trácense ΛE, ΛZ, ΛH, ΛΘ, ME, MZ, MH, MΘ. Como KE es igual a KΘ y el ángulo EKΘ es recto, entonces el (cuadrado) de ΘE es el doble del cuadrado de EK [I 47]. Como, a su vez, ΛK es igual a KE y el ángulo ΛKE es recto, entonces el cuadrado de EΛ es el doble del cuadrado de EK [id]. Pero se ha demostrado que también el cuadrado de ΘE es el doble del cuadrado de EK; entonces el cuadrado de ΛE es igual al cuadrado de EΘ; luego ΛE es igual a EΘ. Por lo mismo, ΛΘ es también igual a ΘE; por tanto, el triángulo ΛEΘ es equilátero. De manera semejante demostraríamos que cada uno de los triángulos restantes cuyas bases son los lados del cuadrado EZHΘ y sus vértices los puntos Λ, M, son



equiláteros; por tanto, se ha construido un octaedro comprendido por ocho triángulos equiláteros.

Ahora hay que envolverlo en la esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del (cuadrado) del lado del octaedro.

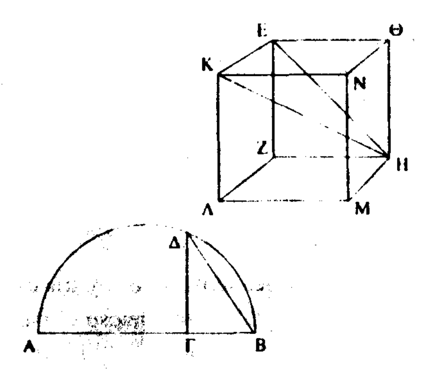
Pues como las tres (rectas) ΛK, KM, KE son iguales entre sí, entonces el semicírculo descrito sobre ΛM pasará también por el punto E. Y por lo mismo, si, permaneciendo fija ΛM, se hace girar el semicírculo y se vuelve a la misma posición desde donde empezó a moverse, pasará también por los puntos Z, H, Θ, y el octaedro quedará envuelto en una esfera. Digo además que también en la esfera dada. Pues como ΛK es igual a KM y KE es común y comprenden ángulos rectos, entonces, la base ΛE es igual a la base EM [I 4]. Y como el ángulo ΛEM es recto, porque está en un semicírculo [III 31], entonces el cuadrado de ΛM es el doble del cuadrado de ΛE [I 47]. Como, a su vez, AΓ es igual a ΓB, AB es el doble de BΓ. Pero como AB es a BΓ, así el cuadrado de AB al cuadrado de BΔ; entonces el cuadrado de AB es el doble del cuadrado de BΔ. Pero se ha demostrado que también el cuadrado de ΛM es el doble del de ΛE. Y el cuadrado de ΔB es igual al cuadrado de ΛE, porque EΘ se ha hecho igual a ΔB. Entonces el cuadrado de AB es igual al cuadrado de ΛM; luego AB es igual a ΛM. Y AB es el diámetro de la esfera dada; por tanto ΛM es igual al diámetro de la esfera dada.

Por consiguiente, se ha envuelto el octaedro en la esfera dada. Y se ha demostrado al mismo tiempo que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del (cuadrado) del lado del octaedro. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 15

Construir un cubo y envolverlo en una esfera como la pirámide, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del (cuadrado) del lado del cubo.

Póngase AB como diámetro de la esfera dada y córtese por el punto Γ de modo que AΓ sea el doble de ΓB; descríbase sobre



AB, el semicírculo AΓB; desde el punto Γ, trácese ΓΔ formando ángulos rectos con AB, y trácese ΔB; póngase el cuadrado EZHΘ que tenga el lado igual a ΔB, y trácense, desde los puntos E, Z, H, Θ las (rectas) EK, ZΛ, HM, ΘN formando ángulos rectos con el plano del cuadrado EZHΘ; y de EK, ZΛ, HM, ΘN quítense respectivamente EK, ZΛ, HM, ΘN iguales a una de las (rectas) EZ, ZH, HΘ, ΘE, y trácense KΛ, ΛM, MN, NK; entonces se ha construido el cubo ZN comprendido por seis cuadrados iguales. Ahora hay que envolverlo en la esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del (cuadrado) del lado del cubo.

Trácense, pues, KH, EH. Y como el ángulo KEH es recto,

porque KE forma ángulos rectos con el plano EH y, evidentemente, también con la recta EH [XI Def. 3], entonces el semicírculo descrito sobre KH pasará por el punto E. Como, a su vez, HZ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) ZΛ, ZE, entonces HZ forma ángulos rectos también con el plano ZK; de modo que, si trazamos la (recta) ZK, HZ formará también ángulos rectos con la (recta) ZK; y por eso, el semicírculo descrito sobre HK pasará a su vez por el (punto) Z. De manera semejante, pasará también por los puntos (angulares) restantes del cubo. Entonces, si, permaneciendo fija KH, se hace girar el semicírculo y se vuelve al mismo lugar de donde empezó a moverse, el cubo quedará envuelto en la esfera.

Digo además que en la esfera dada.

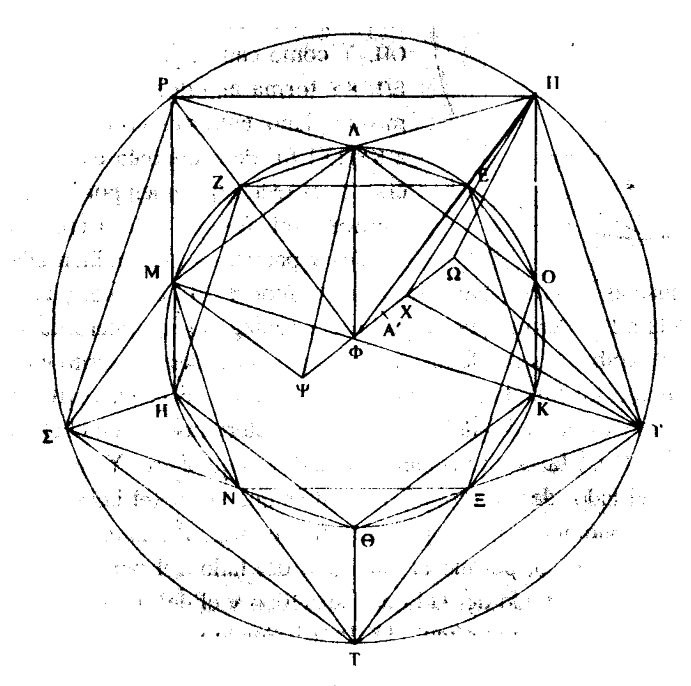
Pues como HZ es igual a ZE y el ángulo correspondiente a Z es recto, entonces el cuadrado de EH es el doble del de EZ. Pero EZ es igual a EK; entonces el cuadrado de EH es el doble del cuadrado de EK; de modo que los cuadrados de HE, EK, es decir, el cuadrado de HK [I 47], son el triple del cuadrado de EK. Y como AB es el triple de BΓ, mientras que, como AB es a BΓ, así el cuadrado de AB al cuadrado de BΔ, entonces el cuadrado de AB es el triple del cuadrado de BΔ. Pero se ha demostrado que también el cuadrado de HK es el triple del cuadrado de KE. Y KE se ha hecho igual a ΔB; luego KH es también igual a AB. Y AB es el diámetro de la esfera dada; por tanto, KH es igual al diámetro de la esfera dada.

Por consiguiente, el cubo ha quedado envuelto en la esfera dada y se ha demostrado, al mismo tiempo, que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del (cuadrado) del lado del cubo. Q. E. D.

Proposición 16

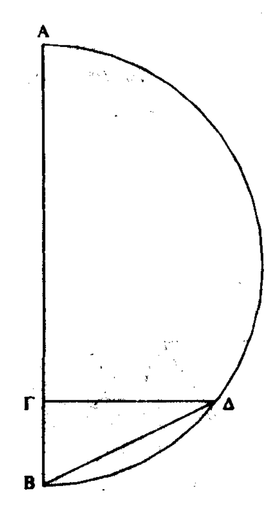
Construir un icosaedro y envolverlo en una esfera, como en las figuras antedichas, y demostrar que el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada «menor».

Póngase AB como diámetro de la esfera dada [véase la figura de la pág. 344] y córtese por el punto Γ de modo que AΓ sea el cuádruple de ΓB; descríbase sobre AB el semicírculo AΔB; trá-



cese desde Γ la línea recta ΓΔ que forme ángulos rectos con AB, y trácese ΔB; póngase el círculo EZHΘK, cuyo radio sea igual a ΔB, e inscríbase en el círculo EZHΘK el pentágono equilátero y

equiangular ΕΖΗΘΚ; divídanse en dos partes iguales las circunferencias ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ por los puntos Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, y trácense ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. Entonces, el pentágono ΛΜΝΞΟ es también equilátero, y la recta ΕΟ es (el lado) de un decágono. Y desde los puntos Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, levántense las rectas ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ que formen ángulos rectos con el plano del círculo y sean iguales al radio del círculo ΕΖΗΘΚ; trácense ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. Y como cada una de las (rectas) ΕΠ, ΚΥ forma ángulos rectos con el mismo plano, entonces ΕΠ es paralela a ΚΥ [XI 6]. Pero también es igual a ella. Y las rectas que unen por los (extremos) del mismo lado a (rectas) iguales y paralelas, son también ellas



mismas iguales y paralelas [I 33]. Entonces ΠΥ es igual y paralela a ΕΚ. Pero ΕΚ es (un lado) del pentágono equilátero; luego ΠΥ también es (un lado) del pentágono equilátero inscrito en el círculo ΕΖΗΘΚ. Por lo mismo, cada una de las (rectas) ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ es (un lado) del pentágono equilátero inscrito en el círculo ΕΖΗΘΚ; luego el pentágono ΠΡΣΤΥ es equilátero. Y como ΠΕ es (el lado) de un hexágono mientras que ΕΟ es (el lado) de un decágono, y el ángulo ΠΕΟ es recto, entonces ΠΟ es (el lado) de un pentágono, porque el cuadrado del lado del pentágono es igual al cuadrado del lado del hexágono y el del decágono inscritos en el mismo círculo [XIII 10]. Por lo mismo, ΟΥ es también un lado del pentágono. Pero ΠΥ es también (un lado) del pentágono; luego el triángulo ΠΟΥ es equilátero. Por lo mismo cada uno de los (triángulos) ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ es equilátero. Y como se ha demostrado que cada una de las (rectas) ΠΛ, ΠΟ es

(un lado) del pentágono, ΛΟ también es (un lado) del pentágono, entonces el triángulo ΠΛΟ es equilátero. Por lo mismo, cada uno de los triángulos ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ es equilátero. Tómese el punto Φ como centro del círculo ΕΖΗΘΚ; y a partir de Φ, levántese ΦΩ formando ángulos rectos con el plano del círculo y prolónguese hacia el otro lado como ΦΨ, y quítese ΦΧ, lado del hexágono, y cada una de las (rectas) ΦΨ, ΧΩ, lados del decágono, y trácense ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. Ahora bien, como cada una de las (rectas) ΦΧ, ΠΕ forma ángulos rectos con el plano del círculo, entonces ΦΧ es paralela a ΠΕ [XI 6]. Pero también son iguales; entonces ΕΦ, ΠΧ también son iguales y paralelas [I 33]; pero ΕΦ es (el lado) de un hexágono; entonces ΠΧ es también (el lado) de un hexágono. Y como ΠΧ es (el lado) de un hexágono y ΧΩ (el) de un decágono y el ángulo ΠΧΩ es recto, entonces ΠΩ es el lado de un pentágono [XIII 10]. Por lo mismo ΥΩ es también el (lado) de un pentágono, porque si trazamos ΦΚ, ΧΥ serán también iguales y opuestas, y ΦΚ, siendo un radio, es (el lado) de un hexágono [IV 15 Por.], entonces ΧΥ es (el lado) de un hexágono. Pero ΧΩ es (el lado) de un decágono, y el ángulo ΥΧΩ es recto, entonces ΥΩ es (el lado) de un pentágono [XIII 10]. Pero ΠΥ también es de un pentágono; luego el triángulo ΠΥΩ es equilátero. Por lo mismo, cada uno de los restantes triángulos cuyas bases son las rectas ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, y su vértice el punto Ω son equiláteros. Y como ΦΛ es a su vez (el lado) de un hexágono y ΦΨ (el) de un decágono y el ángulo ΛΦΨ es recto, entonces ΛΨ es (el lado) de un pentágono [XIII 10]. Por lo mismo, si trazamos ΜΦ que es (el lado) de un hexágono, se sigue que ΜΨ también es el (lado) de un pentágono y ΛΜ también es el (lado) de un pentágono; luego el triángulo ΛΜΨ es equilátero. De manera semejante se demostraría que cada uno de los triángulos restantes cuyas bases son ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ y su vértice el punto Ψ son equiláteros. Por tanto, se ha construido un icosaedro comprendido por veinte triángulos equiláteros.

Ahora hay que envolverlo en la esfera dada y demostrar que el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada «menor».

Pues como ΦX es (el lado) de un hexágono y XΩ de un decágono, entonces ΦΩ se ha cortado en extrema y media razón por el (punto) X y ΦX es su segmento mayor [XIII 9]; entonces, como ΩΦ es a ΦX, así ΦX a ΦΨ; pero ΦX es igual a ΦE y XΩ a ΦΨ; entonces, como XΩ es a ΦE, así EΦ a ΦΨ, y los ángulos ΩΦE, EΦΨ son rectos; luego, si trazamos la recta EΩ, el ángulo ΨEΩ será recto por la semejanza de los triángulos ΨEΩ, ΦEΩ. Por lo mismo, dado que, como ΩΦ es a ΦX, así ΦX a XΩ, mientras que ΩΦ es igual a ΨX y ΦX a XΠ, entonces, como ΨX es a XΠ, así ΠX a XΩ. Y de nuevo, por la misma razón, si trazamos ΠΨ, el ángulo correspondiente a Π será recto [VI 8]; luego el semicírculo descrito sobre ΨΩ pasará también por Π [III 31]. Y si permaneciendo fija ΨΩ, se hace girar el semicírculo y se vuelve a la misma posición desde donde empezó a moverse pasará también por Π y los puntos (angulares) restantes del icosaedro; y el icosaedro quedará envuelto en una esfera.

Digo ahora que en la esfera dada.

Divídase, pues, ΦX en dos partes iguales por el punto A'. Y como la línea recta ΦΩ ha sido cortada en extrema y media razón por el (punto) X y su segmento menor es ΩX, entonces el cuadrado de ΩX añadido a la mitad del segmento mayor XA' es cinco veces el cuadrado de la mitad del segmento mayor [XIII 3]; entonces el cuadrado de ΩA' es cinco veces el cuadrado de A'X. Ahora bien, ΩΨ es el doble de ΩA' y ΦX el doble de A'X; entonces, el cuadrado de ΩΨ es cinco veces el cuadrado de XΦ. Y como AΓ es el cuádruple de ΓB, entonces AB es cinco veces BΓ. Pero como AB es a BΓ, así el cuadrado de AB al cuadrado de BΔ [VI 8; V Def. 9]; luego el cuadrado de AB es cinco veces el cuadrado de BΔ. Pero se ha demostrado que el cuadrado de ΩΨ es cinco veces el cuadrado de ΦX. Y ΔB es igual a ΦX, por-

que cada una de ellas es igual al radio del círculo ΕΖΗΘΚ; entonces ΑΒ es igual a ΨΩ. Y ΑΒ es el diámetro de la esfera dada; luego ΨΩ es igual al diámetro de la esfera dada. Por tanto, el icosaedro queda envuelto en la esfera dada.

Digo ahora que el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada «menor».

Pues como el diámetro de la esfera es expresable y su cuadrado es el quíntuple del radio del círculo ΕΖΗΘΚ, entonces el radio del círculo ΕΖΗΘΚ es expresable, de modo que también su diámetro es expresable. Pero si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo de diámetro expresable, el lado del pentágono es la (recta) sin razón expresable llamada «menor» [XIII 11]. Pero el lado del pentágono es el lado del icosaedro.

Por consiguiente, el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada «menor».

Porisma:

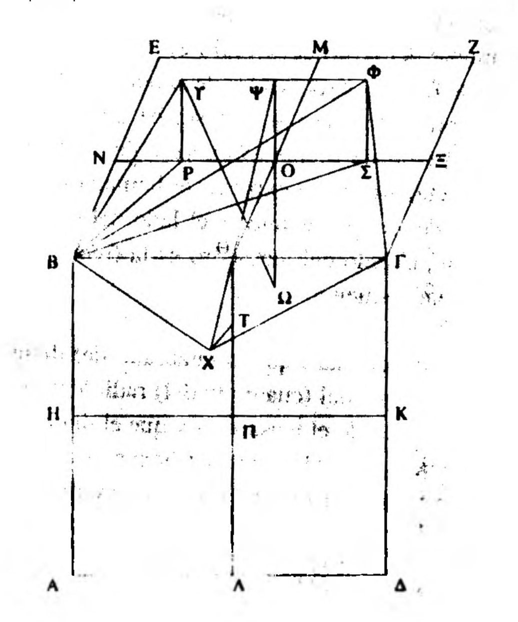
A partir de esto queda claro que el cuadrado del diámetro de la esfera es el quíntuple del (cuadrado del) radio del círculo a partir del cual se ha trazado el icosaedro, y que el diámetro de la esfera está compuesto por el (lado) del hexágono y dos de los (lados) del decágono inscritos en el mismo círculo. Q. E. D.

Proposición 17

Construir un dodecaedro y envolverlo en una esfera como en las figuras antedichas, y demostrar que el lado del dodecaedro es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

Pónganse los dos planos ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ del cubo antedicho formando ángulos rectos entre sí y divídase en dos partes iguales cada uno de los lados ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ por los puntos Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ; trácense ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, y córtese

cada una de las (rectas) NO, OΞ, ΘΠ en extrema y media razón por los puntos P, Σ, T, y sean sus segmentos mayores PO, OΣ, TΠ; levántense desde los puntos P, Σ, T, las (rectas) PΥ, ΣΦ, TX formando ángulos rectos con los planos del cubo hacia la parte exterior del cubo, y háganse iguales a PO, OΣ, TΠ, y trácense ΥB, BX, XΓ, ΓΦ, ΦΥ.



Digo que el pentágono ΥBXΓΦ es equilátero y está en un plano y además que es equiangular.

Trácense, pues, PB, ΣB, ΦB. Y como la recta NO ha sido cor- ... medi... punto P y PO es el seg- ... me... de ON, NP son el triple del cuadrado de PO [XIII 4]. Pero ON es igual a NB y OP a PΥ; entonces, los cuadrados de BN, NP son el triple del cuadrado de PΥ. Pero el cuadrado de BP es igual a los cuadrados de BN, NP [I 47]; entonces, el cuad... BP es el triple del cuadrado de

PY; de modo que los cuadrados de BP, PY son el cuádruple del cuadrado de PY. Pero el cuadrado de BY es igual a los cuadrados de BP, PY; entonces el cuadrado de BY es el cuádruple del cuadrado de YP; luego BY es el doble de PY. Pero ΦY es también el doble de YP, porque ΣP también es (el doble) de OP, es decir de PY. Entonces BY es igual a YΦ. De manera semejante se demostraría que cada una de las (rectas) BX, XΓ, ΓΦ es igual a cada una de las (rectas) BY, YΦ. Luego el pentágono BYΦΓX es equilátero.

Digo ahora que también está en un plano.

Trácese, pues, desde el punto O, la (recta) OΨ paralela a cada una de las (rectas) PY, ΣΦ hacia la parte exterior del cubo, y trácense ΨΘ, ΘX.

Digo que ΨΘX es una recta.

Pues como ΘΠ ha sido cortada en extrema y media razón por T, y su segmento mayor es ΠT, entonces, como ΘΠ es a ΠT, así ΠT a TΘ. Pero ΘΠ es igual a ΘO, y ΠT a cada una de las (rectas) TX, OΨ; entonces, como ΘO es a OΨ, así XT a TΘ. Ahora bien, ΘO es paralela a TX, porque cada una de ellas forma ángulos rectos con el plano BΔ [XI 6]; y TΘ (es paralela) a OΨ, porque cada una de ellas forma ángulos rectos con el plano BZ [id.]. Pero si dos triángulos como ΨOΘ, ΘTX, que tienen dos lados (de uno) proporcionales a dos lados (del otro), se construyen unidos por un ángulo de modo que sus lados correspondientes sean paralelos, las restantes rectas estarán en línea recta [VI 32]. Entonces ΦΘ estará en línea recta con ΘX. Pero toda recta está en un plano [XI 1]; luego el pentágono YBXΓΦ está en un plano.

Digo ahora que es equiangular.

Pues como la línea recta NO ha sido cortada en extrema y media razón por el (punto) P, y su segmento mayor es OP, y OP es igual a OΣ, entonces NΣ ha sido cortada en extrema y media razón por el (punto) O, y su segmento mayor es NO [XIII 5];

luego los (cuadrados) de NΣ, ΣO son el triple del cuadrado de NO [XIII 4]. Pero NO es igual a NB y OΣ a ΣΦ; entonces los cuadrados de NΣ, ΣΦ son el triple del cuadrado de NB; de modo que los cuadrados de ΦΣ, ΣN, NB son el cuádruple del cuadrado de NB. Pero el cuadrado de ΣB es igual a los cuadrados de ΣN, NB; entonces los cuadrados de BΣ, ΣΦ, es decir, el cuadrado de BΦ (porque el ángulo ΦBΣ es recto), son el cuádruple del cuadrado de NB; luego ΦB es el doble de BN. Pero BΓ es también el doble de BN; entonces BΦ es igual a BΓ. Ahora bien, como las dos rectas BY, YΦ son iguales a las dos rectas BX, XΓ y la base BΦ es igual a la base BΓ, entonces el ángulo BYΦ es igual al ángulo BXΓ [I 8]. De manera semejante demostraríamos que el ángulo YΦΓ es igual al ángulo BXΓ; entonces los tres ángulos BXΓ, BYΦ, YΦΓ son iguales entre sí. Pero si tres ángulos de un pentágono equilátero son iguales entre sí, el pentágono será equiangular [XIII 7]; luego el pentágono BYΦΓX es equiangular; y se ha demostrado que también es equilátero; por tanto, el pentágono BYΦΓX es equilátero y equiangular y está sobre un lado, BΓ, del cubo. Por tanto, si seguimos la misma construcción sobre cada uno de los doce lados del cubo, se construirá una figura sólida comprendida por doce pentágonos equiláteros y equiangulares que se llama dodecaedro.

Ahora hay que envolverlo en la esfera dada y demostrar que el lado del dodecaedro es la recta sin razón expresable llamada apótoma.

Prolónguese, pues, ΨO y resulte ΨΩ; entonces, OΩ da con el diámetro del cubo y se dividen en dos partes iguales una a otra, porque esto se ha demostrado en el penúltimo teorema del libro XI [XI 38]. Córtense por el punto Ω; entonces Ω es el centro de la esfera que envuelve el cubo y ΩO es la mitad del lado del cubo. Trácese ahora YΩ, y como la línea recta NΣ ha sido cortada en extrema y media razón por el punto O y su segmento mayor es NO, entonces los cuadrados de NΣ, ΣO son el triple

del cuadrado de NO [XIII 4]. Pero NΣ es igual a ΨΩ, porque también NO es igual a ΟΩ y ΨΟ a ΟΣ. Pero también ΟΣ (es igual) a ΩΥ, porque también (es igual) a ΡΟ; entonces los cuadrados de ΩΨ, ΨΥ son el triple del cuadrado de NO. Pero el cuadrado de ΥΩ es igual a los cuadrados de ΩΨ, ΨΥ; entonces el cuadrado de ΥΩ es el triple del cuadrado de NO. Pero el cuadrado del radio de la esfera que envuelve al cubo es también el triple del cuadrado de la mitad del lado del cubo, pues se ha demostrado anteriormente cómo construir un cubo y envolverlo en una esfera y cómo probar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del cuadrado del lado del cubo [XIII 15]. Y si el todo (es el triple) del todo, también la mitad lo es de la mitad; y NO es la mitad del lado del cubo; luego ΥΩ es igual al radio de la esfera que envuelve al cubo. Ahora bien Ω es el centro de la esfera que envuelve al cubo; entonces el punto Υ está en la superficie de la esfera. De manera semejante demostraríamos que cada uno de los restantes ángulos del dodecaedro están en la superficie de la esfera; por tanto, el dodecaedro queda envuelto en la esfera dada.

Digo ahora que el lado del dodecaedro es la recta sin razón expresable llamada apótoma.

Pues como, una vez cortada NO en extrema y media razón, ΡΟ es su segmento mayor y, una vez cortada ΟΞ en extrema y media razón, ΟΣ es su segmento mayor; entonces, si se corta la recta entera NΞ en extrema y media razón, su segmento mayor es ΡΣ. Puesto que, como NO es a ΟΡ, ΟΡ a ΡΝ, también lo son los dobles, porque las partes guardan la misma razón que sus equimúltiplos [V 15]. Luego, como NΞ es a ΡΣ, así ΡΣ a la suma de ΝΡ, ΣΞ. Pero NΞ es mayor que ΡΣ, entonces ΡΣ es mayor que la suma de ΝΡ, ΣΞ; entonces NΞ ha sido cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es ΡΣ. Y ΡΣ es igual a ΥΦ; luego, si se corta NΞ en extrema y media razón, el segmento mayor es ΥΦ. Y como el diámetro de la esfera es expresable y

su cuadrado es el triple del cuadrado del lado del cubo, entonces NΞ, que es el lado del cubo, es expresable. Pero si una línea expresable se corta en extrema y media razón, cada uno de los segmentos es una recta sin razón expresable (llamada) apótoma [XIII 6].

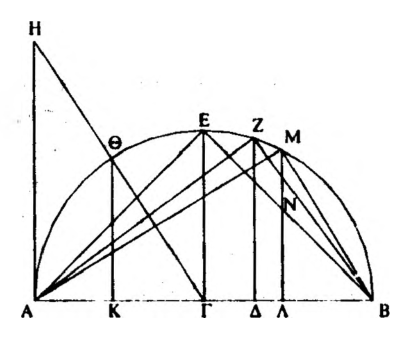
Porisma:

A partir de esto queda claro que, si se corta el lado del cubo en extrema y media razón, el segmento mayor es el lado del dodecaedro. Q. E. D.

Proposición 18

Poner los lados de las cinco figuras y compararlos entre sí.

Póngase el diámetro AB de la esfera dada y córtese por el punto Γ de modo que AΓ sea igual a ΓB, y por el punto Δ de modo que AΔ sea el doble de ΔB; y descríbase sobre AB el semicírculo AEB, y a partir de Γ, Δ, trácense ΓE, ΔZ formando ángu-



los rectos con AB, y trácense AZ, ZB, EB. Y como AΔ es el doble de ΔB, entonces AB es el triple de BΔ. Luego, por conversión, BA es una vez y media AΔ. Pero como BA es a AΔ, así el cuadrado de BA al cuadrado de AZ [V Def. 9; VI 18]; porque el trián-

gulo AZB es de ángulos iguales a los del triángulo AZΔ; entonces el cuadrado de BA es una vez y media el cuadrado de AZ. Pero el cuadrado del diámetro de la esfera también es una vez y media el (cuadrado del) lado de la pirámide [XIII 3]. Y AB es el diámetro de la esfera; luego AZ es igual al lado de la pirámide.

Como AΔ es a su vez el doble de ΔB, entonces AB es el triple de BΔ. Pero, como AB es a BΔ, así el cuadrado de AB al cuadrado de BZ [VI 8; V Def. 9]; entonces el cuadrado de AB es el triple del cuadrado de BZ. Pero el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del lado del cubo [XIII 15]. Y AB es el diámetro de la esfera; luego BZ es el lado del cubo.

Y como AΓ es igual a ΓB, entonces AB es el doble de BΓ. Pero, como AB es a BΓ, así el cuadrado de AB al cuadrado de BE; entonces el cuadrado de AB es el doble del cuadrado de BE. Pero el cuadrado del diámetro de la esfera es también el doble del (cuadrado del) lado del octaedro [XIII 14]. Y AB es el diámetro de la esfera dada; luego BE es el lado del octaedro.

Trácese, pues, desde el punto A, AH formando ángulos rectos con AB, y hágase AH igual a AB; trácese HΓ y, desde Θ, trácese ΘK perpendicular a AB. Ahora bien, dado que HA es el doble de AΓ, porque HA es igual a AB; y como HA es a AΓ, así ΘK a KΓ, entonces ΘK es el doble de KΓ. Luego el cuadrado de ΘK es el cuádruple del cuadrado de KΓ. Por tanto, los cuadrados de ΘK, KΓ que son el cuadrado de ΘΓ, son el quíntuple del cuadrado de KΓ. Pero ΘΓ es igual a ΓB; entonces el cuadrado de BΓ es el quíntuple del cuadrado de ΓK. Y como AB es el doble de ΓB, y en ellas AΔ es el doble de ΔB, entonces la (recta) restante BΔ es el doble de la (recta) restante ΔΓ. Luego BΓ es el triple de ΓΔ; por tanto, el cuadrado de BΓ es nueve veces el cuadrado de ΓΔ. Pero el cuadrado de BΓ es el quíntuple del cuadrado de ΓK; entonces el cuadrado de ΓK es mayor que el cuadrado de ΓΔ. Luego ΓK es mayor que ΓΔ. Hágase ΓΛ igual a ΓK y por el (punto) Λ trácese ΛM formando ángulos rectos con AB, y trácese

MB. Y como el cuadrado de BΓ es el quíntuple del cuadrado de ΓK y AB es el doble de BΓ y KΛ el doble de ΓK, entonces el cuadrado de AB es el quíntuple del cuadrado de KΛ. Pero también el cuadrado del diámetro de la esfera es el quíntuple del radio del círculo a partir del cual se ha construido el icosaedro [XIII 16 Por.]. Y AB es el diámetro de la esfera; entonces KΛ es el radio del círculo a partir del cual se ha construido el icosaedro; luego KΛ es un lado del hexágono en el círculo antedicho [IV 15 Por.]. Y como el diámetro de la esfera está compuesto a partir del (lado) del hexágono y dos (lados) de los del decágono inscrito en el círculo antedicho, y AB es el diámetro de la esfera, mientras que KΛ es el lado del hexágono y AK es igual a ΛB, entonces cada una de las (rectas) AK, ΛB es un lado del decágono inscrito en el círculo a partir del cual se ha construido el icosaedro. Y como ΛB es un (lado) del decágono y MΛ del hexágono, porque es igual a KΛ y porque es también igual a ΘK —pues están a igual distancia del centro— y cada una de las (rectas) ΘK, KΛ es el doble de KΓ, entonces MB es un lado del pentágono [XIII 10]. Y el lado del pentágono es el del icosaedro [XIII 16]; entonces MB es el lado del icosaedro.

Ahora bien, como ZB es el lado del cubo, córtese en extrema y media razón por el punto N y sea NB el segmento mayor; entonces NB es un lado del dodecaedro [XIII 17 Por.].

Y como se ha demostrado que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado AZ de la pirámide, mientras que es el doble del cuadrado del lado BE del octaedro, y el triple del cuadrado del lado ZB del cubo, entonces el cuadrado del diámetro de la esfera (tiene) seis partes, de las que el (cuadrado del lado) de la pirámide (tiene) cuatro, el del octaedro, tres y el del cubo dos. Luego el cuadrado del lado de la pirámide es cuatro tercios del cuadrado del lado del octaedro y el doble del cuadrado del lado del cubo, y el cuadrado del lado del octaedro es una vez y media el del lado del cubo. Así pues,

los lados de las tres figuras antedichas, digo, de la pirámide, del octaedro y del cubo, guardan entre sí razones expresables. Pero los dos restantes, digo el del icosaedro y el del dodecaedro no guardan razones expresables ni entre sí ni con los antedichos, porque son, una «menor» [XIII 16] y otra, apótoma [XIII 17].

Demostraremos de la siguiente manera que el lado MB del icosaedro es mayor que el (lado) NB del dodecaedro:

Pues como el triángulo ZΔB es de ángulos iguales a los del triángulo ZAB [VI 8], proporcionalmente, como ΔB es a BZ, así BZ a BA [VI 4]. Y como las tres rectas son proporcionales, como la primera es a la tercera, así el cuadrado de la primera al cuadrado de la segunda [V Def. 9; VI 20 Por.], entonces, como ΔB es a BA, así el cuadrado de ΔB al (cuadrado) de BZ; luego, por inversión, como AB es a BΔ, así el cuadrado de ZB al cuadrado de BΔ. Pero AB es el triple de BΔ; entonces el cuadrado de ZB es el triple del cuadrado de BΔ. Pero el cuadrado de AΔ es el cuádruple del (cuadrado) de ΔB, porque AΔ es el doble de ΔB; entonces el cuadrado de AΔ es mayor que el cuadrado de ZB; luego AΔ es mayor que ZB; por tanto, AΛ es mucho mayor que ZB. Y si AΛ se corta en extrema y media razón, su segmento mayor es KΛ, porque ΛK es un lado del hexágono y KA del decágono [XIII 9]; pero si ZB se corta en extrema y media razón, su segmento mayor es NB; entonces KΛ es mayor que NB. Pero KΛ es igual a ΛM; luego ΛM es mayor que NB. Por tanto, el lado MB que es el (lado) del icosaedro es mucho mayor que NB que es el lado del dodecaedro. Q. E. D.

Digo ahora que, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por (figuras) equiláteras y equiangulares iguales entre sí.

Porque no se construye un ángulo sólido con dos triángulos o, en absoluto, con dos planos. Sino que el ángulo de la pirámide se construye con tres triángulos, el del octaedro con cua-

tro, el del icosaedro con cinco; pero no se construirá un ángulo sólido mediante seis triángulos equiláteros y equiangulares (colocados) en un sólo punto; porque si el ángulo del triángulo equilátero es dos tercios de un recto, los seis serán iguales a dos rectos; lo cual es imposible, porque todo ángulo sólido es comprendido por menos de cuatro rectos [XI 21]. Por lo mismo, tampoco se construye un ángulo sólido con más de seis ángulos planos. Y el ángulo del cubo es comprendido por tres cuadrados; por cuatro es imposible, porque serán a su vez cuatro rectos. Y el (ángulo) del dodecaedro es comprendido por tres pentágonos equiláteros y equiangulares; por cuatro es imposible, porque, siendo el ángulo del pentágono equilátero un recto más un quinto, los cuatro ángulos serán mayores que cuatro rectos; lo cual es imposible. Y un ángulo sólido tampoco será comprendido por otros polígonos en razón de la misma imposibilidad.

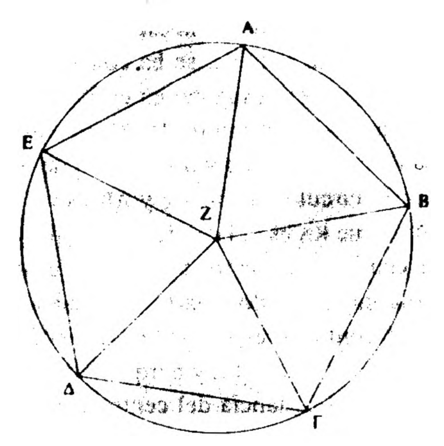
Por consiguiente, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura sólida comprendida por (figuras) equiláteras y equiangulares. Q. E. D. [76].

---

[76] Como ya se ha sugerido en la nota introductoria a la geometría del espacio (*vid. supra*, nota 49), las connotaciones cosmológicas y simbólicas de los poliedros regulares, en las tradiciones neoplatónica y neopitagórica, dieron a su estudio una coloración especial. Hasta el punto de que el mismo Proclo, en su comentario al libro I de los *Elementos*, asegura que un objetivo capital de Euclides era precisamente el de cerrar con este broche de oro su composición —la verdad es que Euclides nada deja entrever en tal respecto—. Sea como fuere, este colofón del libro XIII, la existencia de justamente cinco poliedros regulares distintos, no ha dejado de atraer la atención hasta nuestros días. En cierto sentido, esta determinación de cinco, ni más ni menos, reviste menos importancia que la generación del concepto mismo de regularidad —en la que bien pudo desempeñar un papel decisivo la contribución de Teeteto, *vid.* W. C. WATERHOUSE, «The discovery of the regular solids», *Archive for History of Exact Sciences* 9 (1972), 212-221)—. Por otro lado, según es bien sabido, en el resultado de Euclides ha de sobrentenderse que los poliedros regulares en

LEMA

Hay que demostrar de la siguiente manera que el ángulo del pentágono equilátero y equiangular es un recto más un quinto.



Pues sea ΑΒΓΔΕ un pentágono equilátero y equiangular y circunscríbase en torno a él el círculo ΑΒΓΔΕ, y tómese su centro Z; trácense ZA, ZB, ZΓ, ZΔ, ZE. Entonces dividen en dos partes iguales los ángulos correspondientes a A, B, Γ, Δ, E del pen-

---

cuestión son convexos. Pero además de este supuesto adicional, resultan pertinentes otras precisiones añadidas a un concepto restringido de convexidad, si se quiere salvar esa identificación de cinco y sólo cinco. En nuestro siglo (e. g. a partir del estudio enciclopédico de E. STEINITZ, 1916, sobre los poliedros), el resultado de Euclides se asume en el contexto de una definición de la regularidad en términos de equivalencia bajo simetrías: un poliedro es regular si su grupo de simetrías se comporta transitivamente con respecto al triplete compuesto por los elementos: cara, arista, vértice, todos ellos mutuamente incidentes. Vid. el informe de B. GRÜNBAUM, «Regular Polyedra», en I. GRATTAN-GUINNESS, (ed.) *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Londres-Nueva York, 1994; t. 2, 7.2, págs. 866-876. Por lo demás, tanto el estudio de los poliedros regulares, en general, como la

tágono. Y como los cinco ángulos correspondientes a Z son iguales a cuatro rectos y son iguales, entonces uno de ellos, como el AZB, es un recto menos un quinto; luego los restantes ángulos ZAB, ABZ son un recto y un quinto. Pero el ángulo ZAB es igual al ángulo ZBΓ; por tanto, el ángulo entero ABΓ del pentágono es un recto y un quinto. Q. E. D.

---

consideración de otras diversas clases de poliedros, siguen siendo temas cultivados en nuestros días. Una muestra de lo primero es la extensión del concepto de poliedro regular a espacios hiperbólicos y otros espacios n-dimensionales, e. g. en la línea de H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Nueva York, 1973[3], y *Regular Complex Polytopes*, Cambridge, 1991[2]. Una muestra de lo segundo es la investigación de poliedros isogonales, i. e. aquellos cuyos vértices son todos ellos equivalentes bajo las simetrías del poliedro, e. g. en la línea de B. Grünbaum y G. C. Shephard, «Polyhedra with transitivity properties», *Comptes rendues, Acad. des Sciences, Soc. Royale Canada* 6 (1984), 61-66. Naturalmente, de todo esto no se desprende que Euclides siga siendo un geómetra contemporáneo, o que el lenguaje de los *Elementos* nunca haya dejado de ser una lengua matemática viva y de uso obligado. Más bien se desprende lo contrario. Pero al margen de este punto —que, por cierto, toca un tema de palpitante actualidad entre los historiadores de las matemáticas, el tema de si hay o no revoluciones científicas y cambios de paradigma en estas ciencias, cf. *e. g.* D. Gillies, ed., *Revolutions in Mathematics*, Oxford, 1992—, es difícil negarse a reconocer el olfato de los antiguos matemáticos griegos para dar con temas de importancia básica, con cuestiones de permanente interés y con objetos capaces de seducir a gentes de diversos tiempos y culturas. Si estas formas de proyección son una de las marcas de un «autor clásico», hay autores clásicos griegos tanto en el campo de las artes y las letras como en el campo del conocimiento y del método científico: los hay a pesar de los prejuicios «literarios» que dan en limitar el legado griego al ámbito de las humanidades; los hay a pesar de los prejuicios «científicos» que dan en suponer que el conocimiento no puede desarrollarse sin matar al padre. Euclides es un autor clásico.

ÍNDICE GENERAL